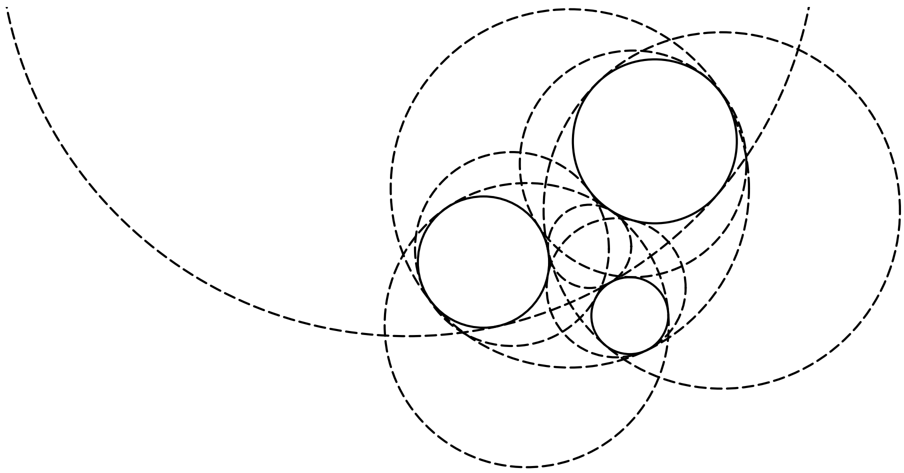
Satu Sutelainen

Apollonioksen ongelman ratkaiseminen harpilla ja viivaimella



Informaatioteknologian ja viestinnän tiedekunta
Pro gradu -tutkielma
Matematiikka
Toukokuu 2019

TIIVISTELMÄ

Satu Sutelainen: Apollonioksen ongelman ratkaiseminen harpilla ja viivaimella
Pro gradu -tutkielma, 40 op
Tampereen yliopisto
Matematiikan ja tilastotieteen tutkinto-ohjelma
Matematiikan aineenopettajan opintosuunta
Toukokuu 2019

Tämä tutkielma käsittelee ikivanhaa ja kuuluisaa geometrian konstruktio-ongelmaa nimeltään *Apollonioksen ongelma*. Geometrinen konstruoiminen tarkoittaa geometrisen ongelman ratkaisemista harpilla ja viivaimella piirtäen, joten tavoiteltava konstruktio on kuva. Apollonioksen ongelma on kuitenkin mahdollista ratkaista lukuisilla muillakin menetelmillä kuin harpilla ja viivaimella, esimerkiksi algebrallisesti.

Apollonioksen ongelma kuuluu seuraavasti: *Olkoon euklidisessa tasossa kolme mielivaltaista ympyrää. Etsi neljäs ympyrä, joka sivuaa jokaista annettua ympyrää. Kunkin annetun ympyrän säteen sallitaan vaihtelevan nollasta äärettömään, jolloin annettu ympyrä on pienimmillään piste ja suurimmillaan suora.* Ympyrän käsitettä ajatellaan annetun kuvion tapauksessa siis tavallisesta käsityksestä poikkeavasti, laajennetusti. Ratkaisuympyrän säteen vaaditaan kuitenkin olevan tavalliseen tapaan nollaa suurempi ja äärellinen.

Annetuista kuvioista (piste, suora tai ympyrä) saadaan muodostettua kymmenen erilaista kolmen annetun kuvion yhdistelmää. Ratkaisuympyröitä voi kussakin tapauksessa olla olemassa useita eri lukumääriä, riippuen annetusta kuvioiden yhdistelmästä sekä kuvioiden keskinäisistä sijainneista. Ratkaisuympyröitä on olemassa yleensä äärellinen määrä, nollasta enintään kahdeksaan, mutta on olemassa myös kuviokolmikoiden asetelmia, joille on olemassa ääretön määrä ratkaisuja.

Johdantoluvussa tutustutaan aluksi lyhyesti itse ongelman keksijään, *Apollonios Pergalaiseen* (n. 262–190 eKr.), sekä hieman hänen muihin keksintöihinsä ja saavutuksiinsa. Sitten esitellään käsiteltävä Apollonioksen ongelma, muutamia muita ympyrämuodostelmia sekä arkielämän sovelluksia, joissa ongelmaa hyödynnetään. Toisessa luvussa käydään läpi tutkielmassa käytettyjä matemaattisia merkintätapoja ja tarvittavia työkaluja. Tutkielman pääosassa on Apollonioksen ongelman eri tapausten ratkaiseminen harpilla ja viivaimella, mitä käydään yksityiskohtaisesti läpi luvussa 3. Viimeisessä luvussa tehdään lopuksi pieni yhteenveto ratkaisuympyröiden lukumäärästä eri tapauksissa, ja esitellään lyhyesti algebrallisen menetelmän idea sekä GeoGebran dynaamisuuden mahdollistamia havainnollistuskeinoja kolmiulotteisen ratkaisukonstruktion avulla.

Tutkielma on kirjoitettu kirjoittajan opettajaopintotaustan innoittamana ja tulevaa ammattia ajatellen mahdollisesti lukiolaiselle ymmärrettävällä tasolla. Tutkielman kuvat on piirretty tietokoneohjelma GeoGebralla, lukuun ottamatta työn viimeistä kuvaa.

Avainsanat: geometria, ympyrä, tangentti, sivuaminen, Apollonios (suom.), Apollonius (engl.), inversio, harppi–viivainkonstruktio.

Sisältö

1 Johdanto

Tämän tutkielman tarkoituksena on esitellä jo antiikin ajoilta peräisin oleva kuuluisa geometrinen konstruktio-ongelma, nimeltään *Apollonioksen ongelma*. Ongelma on nimetty keksijänsä eli antiikin kreikkalaisen *Apollonios Pergalaisen* (n. 262–190 eKr.) mukaan. Geometrinen konstruoiminen tarkoittaa geometrisen ongelman ratkaisemista harpilla ja mitta-asteikottomalla viivaimella piirtäen, joten tavoiteltava konstruktio on kuva.

Tutkielman kuvat on piirretty harpin sekä viivaimen sijaan kuitenkin tietokoneohjelma *GeoGebralla* ja tuotu sieltä TikZ-koodimuodossa LaTeX:iin, jolla tutkielma on kirjoitettu. Tutkielman aihetta pohdittaessa oli toiveena tutkia jotakin klassista geometrian osa-aluetta ja käyttää siihen nimenomaan GeoGebraa, mikä toteutui. Kiinnostus kyseistä dynaamista piirto-ohjelmaa kohtaan johtuu kirjoittajan tulevasta matemaattisten aineitten opettajan ammatista: GeoGebra on nimittäin maksuton, erittäin monipuolinen ja hämmästyttävän helppokäyttöinen ohjelma, minkä takia sitä voidaan käyttää peruskoulussa jo pientenkin oppilaitten kanssa mm. geometriseen havainnollistamiseen. Lisäksi GeoGebra on nykyään sallittu työkalu jopa matematiikan ylioppilaskirjoituksissa, jotka kirjoitettiin tänä keväänä ensimmäistä kertaa sähköisinä.

Tutkielma on kirjoitettu kirjoittajan opettajaopintotaustan tähden mahdollisesti lukiolaiselle ymmärrettävällä tasolla. Teksti sisältääkin siksi paljon perusteluja ja seikkaperäistä selittämistä jopa melko yksinkertaisista matemaattisista faktoista.

Tutkielman pääosassa on Apollonioksen ongelman eri tapausten ratkaiseminen harpilla ja viivaimella, mitä käydään yksityiskohtaisesti läpi luvussa 3. Tutkielmassa opastetaan ja näytetään, *miten* tangenttiympyrät konstruoidaan harpilla ja viivaimella. Utelias lukija voi siis kernaasti ottaa moiset välineet käden ulottuville ja kokeilla myös itse. On toki sallittua ja suositeltavaakin turvautua perinteisten välineiden sijaan esimerkiksi edellä mainostettuun tietokoneohjelma GeoGebraan, jossa on käytössä erinomaiset harppi–viivaintyökalut. Dynaamisessa GeoGebrakuvassa voidaan kuvioita liikutella ja muuttaa niiden kokoa sekä asentoa. Yhdellä piirroksella pystyy siten tutkimaan kätevästi useita erilaisia tapauksia.

Johdantoluvussa tutustutaan seuraavaksi lyhyesti itse ongelman keksijään sekä hieman hänen muihin keksintöihinsä ja saavutuksiinsa. Johdannossa esitellään sitten käsiteltävä Apollonioksen ongelma, joitakin Apollonioksen ongelmasta johdettavia kauniita ympyrämuodostelmia sekä muutamia arkielämän sovelluksia, joissa ongelmaa hyödynnetään. Toisessa luvussa käydään läpi tutkielmassa käytettyjä matemaattisia merkintätapoja sekä tarvittavia työkaluja. Ongelman ratkaisemisen (luku 3) jälkeen tehdään lopuksi pieni yhteenveto mahdollisten ratkaisuympyröiden lukumäärästä eri tilanteissa, ja esitellään lyhyesti algebrallisen ratkaisumenetelmän idea. Viimeisenä esitellään vielä lyhyesti GeoGebran dynaamisuuden mahdollistamia havainnollistuskeinoja internetistä löytyvän kolmiulotteisen ratkaisukonstruktion avulla.

Apollonios Pergalainen (n. 262–190 eKr.)

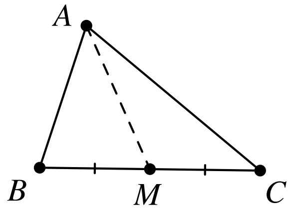
Ongelman keksijä oli antiikin kreikkalainen Apollonios Pergalainen (kreikaksi Ἀπολλώνιος ο Περγαίος, latinaksi *Apollonius Pergaeus* ja englanniksi *Apollonius of Perga*). Perga (tai Perge) sijaitsee Välimeren pohjoisrannikolla nykyisen Turkin alueella, missä muinaisen kaupungin rauniot yhä sijaitsevat. Apollonios on elänyt luultavasti suunnilleen vuosina 262–190 ennen ajanlaskumme alkua, mutta muutoin hänen henkilökohtaisesta elämästä tiedetään hyvin vähän. Saavutustensa perusteella Apolloniosta voidaan ansaitusti kutsua antiikin "Suureksi Geometrikoksi". [Bo, s. 211–213] Hän oli tunnettu myös astronomina [He, s. 195].

Apollonioksen keksintöjä ja saavutuksia

Apollonios kirjoitti paljon, mutta suurin osa hänen kirjoituksistaan on hävinnyt. Apollonioksen teksteistä ja niiden sisällöistä on kuitenkin säilynyt runsaasti mainintoja muiden matemaatikoiden teksteissä. Useiden töiden nimet ovatkin säilyneet, esimerkiksi kirjoitukset *Janojen erottamisesta*, *Alan erottamisesta*, *Annetussa suhteessa leikkaamisesta*, *Tangenteista* (eli *Sivuamisista*) sekä *Siirroista*. Tämän tutkielman aiheena oleva Apollonioksen ongelma on sisältynyt tekstiin *Tangenteista*. Kokonaan säilyneistä teoksista oikeastaan ainoa on *Konika*, joka on yleisteos *kartioleikkauksista*). Tiedetään siis, että jopa kartioleikkausten käsitteet *ellipsi*, *paraabeli* ja *hyperbeli* ovat Apollonioksen keksimiä. [Bo, s. 211–219]

Apollonioksen mukaan on nimetty muutamia lauseita. *Apollonioksen lause* mielivaltaiselle kolmioille kuuluu seuraavasti [Go, s. 20–21]: *Olkoon ABC mielivaltainen kolmio. Olkoon piste M sivun BC keskipiste, jolloin $M \in BC$ ja $|BM| = |MC|$. Tällöin janojen pituuksille pätee*

$$|AB|^2 + |AC|^2 = 2 \cdot |AM|^2 + 2 \cdot |BM|^2 .$$

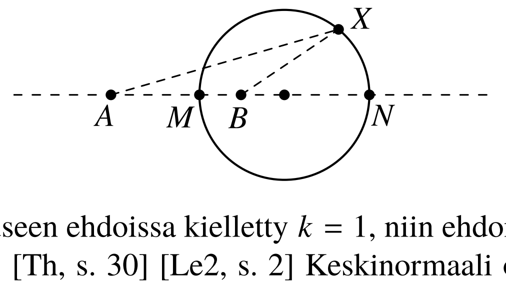


Apollonioksen lause on lisäksi yhtäpitävä suunnikassäännön kanssa, koska suunnikas koostuu kahdesta keskenään yhtenevästä mielivaltaisesta kolmiosta, ja suunnikkaan lävistäjät puolittavat toisensa.

Lause *Apollonioksen ympyrästä* puolestaan voidaan muotoilla sanallisesti seuraavasti: *tason pisteet, joiden kahdesta kiinteästä pisteestä laskettujen etäisyyksien suhde on vakio k (erisuuri kuin yksi), sijaitsevat Apollonioksen ympyräksi kutsutun ympyrän kehällä* [Bo, s. 213]. Olkoot siis kaksi annettua kiintopistettä A ja B, jotka määräävät suoran AB. Olkoon annettu suhdeluku $k \neq 1$ positiivinen vakio. Tällöin kaikki pisteet X, jotka toteuttavat ehdon

$$\frac{|AX|}{|BX|} = k,$$

ovat pisteitä sellaisella ympyrällä (ehdon täyttävien pisteiden *ura*), jonka halkaisija MN sijaitsee suoralla AB. Halkaisijan päätepisteet M ja N toteuttavat pisteelle X asetetun ehdon. Esimerkkikuvassa on Apollonioksen ympyrä, kun suhdeluku k on suunnilleen 2.



Jos annettu suhde onkin lauseen ehdoissa kielletty $k = 1$, niin ehdon täyttävät pisteet sijaitsevat janan AB keskinormaalilla. [Th, s. 30] [Le2, s. 2] Keskinormaali on suora, joten sen voidaan toisaalta ajatella olevan ääretönsäteinen ympyrä, jolloin keskinormaali voitaisiin myös hyväksyä erääksi Apollonioksen ympyräksi. Esitelty ympyrälause siis tunnetaan Apollonioksen nimellä, mutta nimitys on itse asiassa virheellinen, sillä jo *Aristoteles* (384–322 eKr.) tunsi lauseen ja käytti sitä perustellakseen sateenkaaren puoliympyrämuotoa [Bo, s. 213]. Huom. Apollonioksen ympyrällä ei kuitenkaan ole mitään tekemistä tutkielman aiheena olevien tangenttiympyröiden kanssa.

Apollonioksen ongelma

Eräs maailman tunnetuimmista klassisista konstruktio-ongelmista on *Apollonioksen ongelma* (engl. *the tangency problem of Apollonius*), joka on tämän tutkielman aihe. Matemaatikoita jo reilun kahden vuosituhannen ajan kutkuttanut ongelma kuuluu seuraavasti:

> *Olkoon euklidisessa tasossa kolme mielivaltaista ympyrää. Etsi neljäs ympyrä, joka sivuaa kaikkia kolmea annettua ympyrää. Kunkin annetuista ympyröistä sallitaan lisäksi degeneroituvan pisteeksi (ympyrän säde on nolla) tai suoraksi (ympyrän säde lähestyy ääretöntä).* [Cou, s. 117]

Ympyrän käsitettä ajatellaan annetun kuvion tapauksessa siis tavallisesta käsityksestä poikkeavasti, laajennetusti. Etsittävän ratkaisuympyrän säteen vaaditaan kuitenkin olevan tavalliseen tapaan nollaa suurempi ja äärellinen. Apollonioksen ongelma voidaan muotoilla toisaalta myös täysin perinteisen ympyräkäsityksen mukaisesti ilmaisemalla, että olkoot annetut *kuviot* pisteitä, suoria tai ympyröitä. Molemmat ongelman muotoilut ovat keskenään yhtäpitävät.

Pisteistä (P), suorista (S) ja ympyröistä (Y) voidaan muodostaa *kymmenen* erilaista kolmen annetun kuvion kolmikkoa: PPP, SSS, YYY, PPS, PPY, PSS, PYY, SSY, SYY ja PSY. Esimerkiksi ongelman PPP-tapaus on piirtää tangenttiympyrä kolmelle pisteelle. Kyseinen tapaus on tapauksista yksinkertaisin ja helppo konstruoida. Tapauksista vaikein ja ehdottomasti merkittävin on YYY, jossa konstruoidaan tangenttiympyrät kolmelle ympyrälle. Ratkaisuympyröitä voi kussakin tapauksessa olla olemassa useita eri lukumääriä, riippuen annetusta kuvioiden yhdistelmästä sekä kuvioiden keskinäisistä sijainneista. Ratkaisuympyröitä on olemassa yleensä äärellinen määrä, nollasta enintään kahdeksaan, mutta on olemassa myös kuviokolmikoiden asetelmia, joille on olemassa ääretön määrä ratkaisuja.

Vaaditaan, että annettuja kuvioita on täsmälleen *kolme*. Kuviot voivat olla keskenään täysin yhteneviä, esimerkiksi kolme pistettä, mutta tällöin hyväksytään vain asetelmat, joissa keskenään yhtenevät kuviot sijaitsevat jotenkin toisin kuin täsmälleen päällekkäin. *Yhtenevyys* tarkoittaa nimittäin sitä, että keskenään yhtenevät kuviot ovat täsmälleen samanmuotoiset ja samankokoiset, eli *identtiset* ja siten käytännössä *sama* kuvio. Jos siis keskenään yhtenevät annetut kuviot olisivat täsmälleen päällekkäin, olisi annettuja kuvioita vähemmän kuin kolme. Annetut kuviot voivat kuitenkin leikata tai sivuta toisiaan.

Harpilla ja viivaimella piirtämisen matemaattinen perusta nojaa euklidisen tasogeometrian aksioomiin. Piirtämisperiaatteista kaksi tärkeintä ovat seuraavat: *Suora* piirretään *kahden pisteen* kautta (viivaimella). *Ympyrän* piirtämiseksi (harpilla) täytyy tuntea ympyrän *keskipiste* ja jokin ympyrän *kehäpiste* tai ympyrän *säteen* pituus. [Le1, s. 20–22]

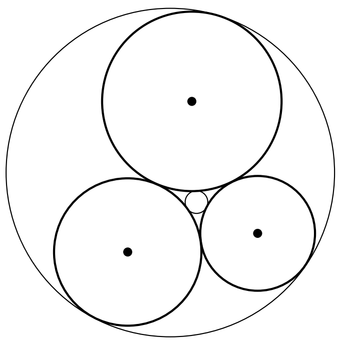
Ongelman ratkaisemiseksi on vuosisatojen saatossa keksitty monenlaisia erilaisia menetelmiä. Kaksi helpointa tapausta, kolmen annetun pisteen (PPP) ja kolmen annetun suoran (SSS) tapaukset, ratkaisi jo *Eukleides* noin 300 eKr. Apollonios Pergalainen ratkaisi itse kaikki loput tapaukset, tosin ilmeisesti vaikeinta lukuun ottamatta. Ongelman tapauksista vaikeimman, kolmen annetun ympyrän asetelman ratkaisi ensimmäisenä ranskalainen *François Viéte* vasta 1500-luvulla, klassisesti harpilla ja viivaimella. Belgialainen *Adriaan van Roomen* esitti 1500-luvun lopulla kiinnostavan ratkaisumenetelmän hyperbelien avulla. Englantilainen *Isaac Newton* osoitti ongelmalle toisenlaisen muotoilun, että *on etsittävä piste, jonka kolmesta kiinteästä pisteestä mitatut etäisyydet tunnetaan*. Newtonin muotoiluun perustuvatkin etäpaikannuksessa käytettävät menetelmät, kuten LORAN (long range navigation) tai GPS (global positioning system). [Kor, s. 81–82] [He, s. 181–182] Joissakin ratkaisumenetelmissä käytetään apuvälineinä homotetiaa ja pisteen potenssia. Esimerkiksi ranskalainen *Joseph-Diaz Gergonne* on esittänyt homotetiaan perustuvan ratkaisumenetelmän. [Ku, s. 36–41] Ongelman ratkaisemisen kanssa painineiden merkittävien matematiikoiden joukkoon kuuluvat edellä mainittujen lisäksi myös mm. *Descartes*, *Lambert*, *Euler*, *Carnot* ja *Gauss* [Bu, s. 164].

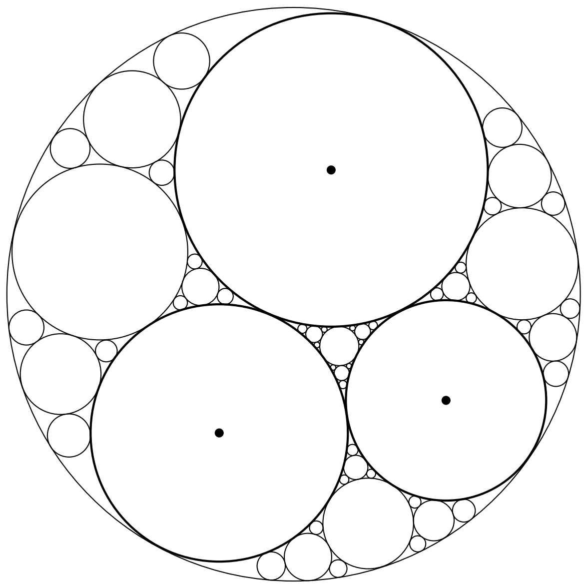
Apollonioksen ongelman YYY-erikoistapauksen innoittamia (tangentti)ympyröitä

Tarkastellaan Apollonioksen ongelman kolmen annetun ympyrän asetelmaa, jossa annetut ympyrät sivuavat toisiaan (ulkoisesti). Ratkaisuympyröitä on tällöin kaksi, yksi annettujen ympyröiden välissä ja yksi ympärillä, ja niitä kutsutaan *Soddyn ympyröiksi* (ks. kuva i). Toisiaan sivuavia ympyröitä voidaan sanoa englanniksi hauskasti toisiaan suuteleviksi ympyröiksi (*kissing circles*). [Roe, s. 10–11] *Descartesin lause ympyröille* (engl. the Descartes circle theorem) määrittelee neliöllisen yhtälön, joka kertoo annettujen ympyröiden sekä ratkaisuympyrän välisen yhteyden ympyröiden säteiden avulla ilmaistuna, eli

$$2\left(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}+\frac{1}{x^2}\right)=\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{x}\right)^2,$$

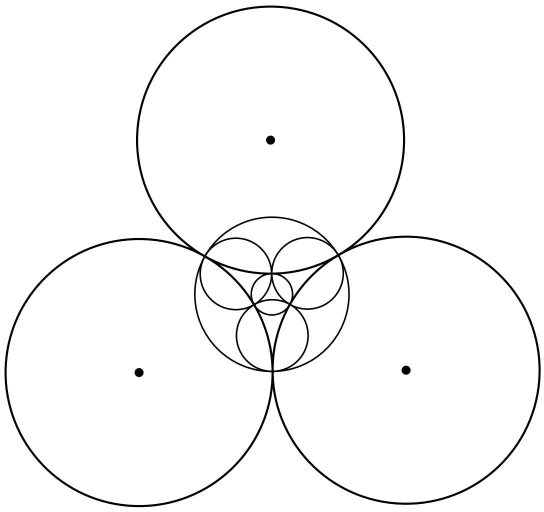
missä a, b ja c ovat annettujen ympyröiden säteiden pituudet ja x ratkaisuympyrän säteen pituus. Annettujen ympyröiden keskipisteet muodostavat kolmion, jonka sivujen pituudet voidaan ilmaista annettujen ympyröiden säteiden pituuksien avulla. [Cox, s. 5–7] Edellä mainitut seikat liittyvät puhtaasti Apollonioksen ongelman YYY-tapaukseen ja sen ratkaisemiseen. Esitellään seuraavaksi kaksi erilaista useamman ympyrän muodostelmaa, jotka voidaan konstruoida (täsmälleen tai suunnilleen) edellä kuvatunlaisesta lähtötilanteesta.


i)


ii)

Kun täydennetään annettujen ympyröiden sekä Soddyn ympyröiden asetelmaa lisäksi pienemmillä tietynlaisilla tangenttiympyröillä (selitetään myöhemmin), saadaan kaunis ja kiinnostava tangenttiympyröiden muodostelma nimeltään *Apollonioksen tiiviste* (engl. Apollonian gasket) [Roe, s. 10–11]. Kyseiset pienet tangenttiympyrät sijaitsevat siten, että kuhunkin kolmen ympyräkaaren rajaamaan alueeseen piirretään tangenttiympyrä, joka sivuaa kyseisen alueen jokaista kolmea reunakaarta (ks. kuva ii). Tällaisia yhä pienempiä ja pienempiä tangenttiympyröitä olisi mahdollista piirtää periaatteessa loputtomiin. Kuvan ii tapauksessa Apollonioksen tiivistettä on täydennetty syvyyteen kolme asti.

Olkoot kolme toisiaan sivuavaa annettua ympyrää samankokoiset, joten niiden keskipisteet sijaitsevat tasasivuisen kolmion kärkipisteissä. Tällaisesta annettujen ympyröiden tapauksesta saavat alkunsa *Beecroftin kahdeksan ympyrää*. Kaikki Beecroftin ympyröiden väliset *yhteiset* *pisteet* ovat erikoisesti sellaisia, joiden kautta kulkee ympyröistä täsmälleen neljä. Jokainen Beecroftin kahdeksasta ympyrästä kulkee täsmälleen kolmen tällaisen (muiden ympyröiden kanssa yhteisen) pisteen kautta. [Cox, s. 5–6] Beecroftin kahdeksan ympyrän asetelmaa muodostettaessa neljäs ympyrä kulkee annettujen kolmen ympyrän sivuamispisteiden kautta, joten se on (edellä mainitun) tasasivuisen kolmion sisään piirretty ympyrä. Neljäs ympyrä siis leikkaa annetut ympyrät niiden sivuamispisteissä. Ympyrät 5.–7. sijaitsevat neljännen ympyrän sisällä siten, että kukin niistä sivuaa yhtä edellistä leikkauspistettä, minkä lisäksi uudet kolme ympyrää sivuavat toisiaan. Uusi pienempi toisiaan sivuavien ympyröiden kolmikko on yhdenmuotoinen annetun ympyräkolmikon asetelman kanssa, joten kahdeksas kaikista pienin ympyrä kulkee samaan tapaan edellisten ympyröiden välisten sivuamispisteiden kautta.



Apollonioksen ongelman sovelluksia arkielämässä

Onko Apollonioksen ongelmasta nykyään mitään hyötyä kenellekään? Kyllä on, jopa arkipäivästä tuttujen sovellusten muodossa, sillä Apollonioksen ongelma on mahdollista ratkaista lukuisilla muillakin menetelmillä kuin harpilla ja viivaimella, esimerkiksi algebrallisesti. Ongelman eräänä merkittävänä sovelluksena mainittiinkin jo etäpaikannus, joka perustuu yleisesti trilateraatioon. Trilateraatiolla tarkoitetaan geometriassa tietyn pisteen sijainnin määrittämistä käyttäen apuna ympyröitä, palloja tai kolmioita. Trilateraatiota hyödynnetään maanmittaamisessa sekä satelliittipaikantamisessa ja navigoinnissa, kuten tosiaan esimerkiksi GPS-paikannuksessa. Muita arkielämän sovelluksia tangenttiympyröille ovat esimerkiksi materiaalin käyttöasteen maksimoiminen sekä pakkaamisongelmat. [Kor, s. 81–82] Apollonioksen ongelman avulla on lisäksi kehitetty ilmatilan käyttämisen ja lentoturvallisuuden avuksi erityinen kolmiulotteinen NASD-menetelmä (non-allowed steering directions), jonka avulla arvioidaan sopiva ilmatunneli (lentoreitin kolmiulotteinen suunnittelu), jossa voidaan lentää turvallisesti ohittaen kaikki sekä maanpäälliset että ilmatilassa sijaitsevat kohteet mahdollisimman etäällä [Fu, s. 9–11].

2 Tarvittavia käsitteitä ja työkaluja

Tässä työssä rajoitutaan tasogeometriaan. Seuraavaksi esitellään tutkielmassa käytetyt merkinnät, geometrian peruskäsitteitä, inversiokuvaus ympyrän suhteen, sekä harpilla ja viivaimella piirtämisen perusmenetelmiä.

2.1 Käytetyt merkinnät

Geometrisen kuvion nimeämisessä käytettävät tunnuskirjaimet voidaan valita monella eri tavalla. Vakiintuneessa yhteydessä esiintyvä kuvion tunnuskirjain tulee usein latinankielisen sanan ensimmäisestä kirjaimesta. Latinan kielitaidon puuttuessa tunnuskirjaimen muistisääntönä voidaan usein pitää englanninkielistä termiä, sillä englanninkielinen geometrian termistö tulee suoraan latinasta. Esimerkiksi ympyrää merkitään usein tunnuksella C, sillä ympyrä on latinaksi *circulus* tai *circus* ja englanniksi *circle*. Muita yleisesti käytettyjä tunnuskirjaimia ovat (englannin muistisäännön tukemana) piste *point* (P), säde *radius* (r), suora *line* (l), origo O jne. Jos esimerkiksi ympyröitä on useampia, niitä voidaan merkitä alaindeksein C_1, C_2 ja C_3. Tässä työssä pyritään kuitenkin välttämään alaindeksien käyttämistä, joten kuvioiden nimeämisessä käytetään enimmäkseen latinalaisia aakkosia riippumatta kuvion nimen alkukirjaimesta. Lisäksi kreikkalaisia aakkosia käytetään esimerkiksi *kulmien* nimeämiseen.

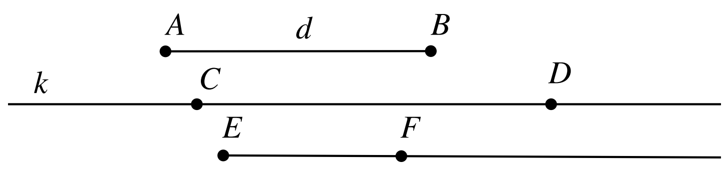
Tunnuskirjain voidaan kirjoittaa joko pienillä tai suurilla kirjaimilla (vaihtelee kirjoittajakohtaisesti), jolloin on lukijaystävällisintä käyttää koko tekstissä yhtenäistä nimeämistapaa. Tässä työssä kirjoitetaan suurilla kirjaimilla *pisteet* sekä *ympyröiden* kehien nimet ja pienillä kirjaimilla *janat* sekä *suorat*. Valittu kirjain voi olla mikä hyvänsä. Samantyyppisille kuvioille valitaan usein johdonmukaisuuden vuoksi aakkosissa peräkkäin olevia kirjaimia, kuten A, B ja C tai R, S ja T tai X, Y ja Z.

Janaa merkitään *päätepisteidensä* A ja B avulla janana AB. *Janan pituutta* eli päätepisteiden välistä etäisyyttä merkitään päätepisteiden avulla itseisarvoissa $|AB|$ tai pienellä kirjaimella d. Janan pisteitä ovat päätepisteiden lisäksi kaikki niiden välissä sijaitsevat pisteet.

Suoraa merkitään pienellä kirjaimella k tai kahden suoralla sijaitsevan pisteen avulla muodossa CD. Suora jatkuu molempiin suuntiinsa äärettömyyteen asti.

Puolisuoran EF merkinnässä luetellaan ensimmäisenä puolisuoran *alkupiste* E ja toisena jokin puolisuoran piste F.

Janan, suoran ja puolisuoran samannäköinen merkintätapa saattaa aiheuttaa sekaannuksen vaaraa (monitulkinnallisuutta), minkä välttämiseksi on osoitettava tarvittaessa sanallisesti, tarkoitetaanko esimerkiksi janaa BC, suoraa BC vai puolisuoraa BC. Vastaava monitulkintaisuus on huomioitava myös merkittäessä janan pituutta ja suoraa pienellä kirjaimella.



Kuva 2.1: Jana AB, janan pituus $|AB| = d$, suora $CD = k$ ja puolisuora EF.

Ympyrää, eli tämän tutkielman tärkeintä kuviota, voidaan merkitä yksikäsitteisesti viidellä eri tavalla:

1) *kehän pistejoukon* nimellä ympyränä G,

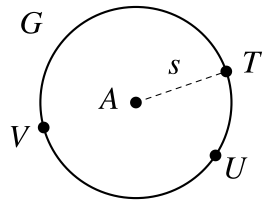
2) *ympyrän keskipisteen* nimellä ympyränä A (mikäli ei ole muita A-keskisiä ympyröitä tai ainakaan erehtymisvaaraa) tai muodossa *A-keskinen ympyrä*,

3) *parina* (A, T), missä A on ympyrän keskipiste ja T jokin kehän G piste ($T \in G$),

4) *parina* $(A, s) = (A, |AT|)$, missä A on ympyrän keskipiste, $T \in G$, ja $s = |AT|$ on *ympyrän säde*, sekä

5) *ympyränä* TUV, missä T, U ja V ovat ympyrän kehän G eri pisteitä eli $T, U, V \in G$.

Merkintätavat 1 ja 2 (erityisesti 2) saattavat aiheuttaa sekaannuksen vaaraa pisteen kanssa, ja merkintätapa 5 saattaa sekoontua kolmion kanssa, joten erityisesti kyseisten merkintätapojen yhteydessä on mainittava kyseessä olevan nimenomaan ympyrä A tai ympyrä TUV. Ympyrän merkintätavat 3 ja 4 kertovat tarvittavat tiedot ympyrän piirtämiseksi *harpilla*. Myös merkintätapa 5 määrää yksikäsitteisen ympyrän, jonka piirtäminen *harpilla ja viivaimella* vaatii kuitenkin hieman enemmän työtä (ks. Apollonioksen ongelman kolmen pisteen tapaus, PPP). Ympyrän nimeämisen erilaiset variaatiot on esitetty kuvassa 2.2.

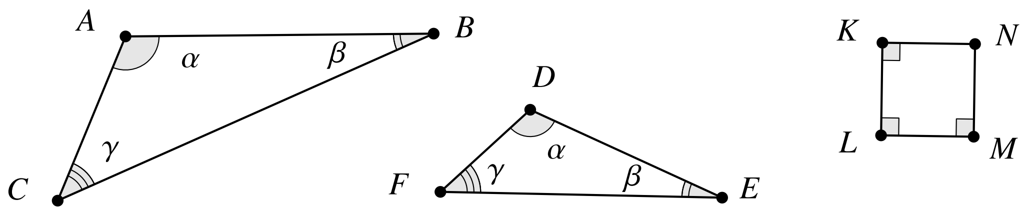


Kuva 2.2: Kuvan ympyrää voidaan merkitä seuraavilla tavoilla: ympyrä G, ympyrä A, A-keskinen ympyrä, ympyrä $(A, T) = (A, U) = (A, V)$, ympyrä $(A, s) = (A, |AT|) = (A, |AU|) = (A, |AV|)$ ja ympyrä TUV.

Ympyräkaari on osa ympyrän kehää, joten kaarta voidaan merkitä kolmen kehäpisteen avulla luetellen ensimmäisenä ja viimeisenä kaaren päätepisteet, ja keskimmäisenä mielivaltainen kaaren päätepisteiden välissä sijaitseva piste. Kuvasta 2.2 voidaan erotella esimerkiksi kolme eri kaarta TUV, UVT ja VTU. Ympyräkaarta voidaan merkitä myös sitä vastaavan keskuskulman tai kehäkulman avulla (vrt. lause 2.11 ja seuraus 2.12).

Monikulmiot, kuten esimerkiksi *kolmiot* ja *nelikulmiot* (esim. *neliö*), nimetään kuvion kärkipisteiden mukaan. Matemaattisessa lausekkeessa esiintyvän kolmion kärkipistenimen eteen kirjoitetaan usein merkki $\triangle$. Esimerkiksi $\triangle ABC \sim \triangle DEF$ tarkoittaa, että kolmiot ABC ja DEF ovat *yhdenmuotoiset*. Kahden kuvion yhdenmuotoisuus tarkoittaa, että kuviot ovat täsmälleen samanmuotoiset mutta toisiinsa nähden mielivaltaisen kokoiset: yhdenmuotoisten kuvioiden *vastinkulmat* ovat täsmälleen samankokoiset, ja kuvioiden kaikkien *vastinsivujen* tai *vastinosien* pituuksien välinen *suhde* on sama.

Kulma nimetään kolmen pisteen avulla siten, että ensin luetellaan jokin kulman *oikean kyljen piste*, toisena *kärkipiste* ja kolmantena *vasemman kyljen piste*. Kylkien luettelemisjärjestyksellä varmistetaan, mitä kulmaa tarkoitetaan, sillä muutoin piirroksesta riippuen saattaisi kyseessä olla (päinvastaisella luettelujärjestyksellä) vaikkapa tarkoitetun kulman *eksplementtikulma* (kulma ja sen eksplementtikulma ovat yhteensä täysi kulma). Esimerkiksi kulmaa CAB voidaan matemaattisessa lauseketekstissä merkitä kulmasymbolin avulla $\angle CAB = \alpha$ (jonka eksplementtikulma olisi BAC, jolloin siis $\angle CAB + \angle BAC = 360\,^\circ$). Tietynkokoisia kulmia merkitään usein myös kreikkalaisin pienaakkosin, kuten α, β ja γ, sillä niillä voi merkitä kulmaa kätevästi lyhyemmin. Kahden (tai useamman) kulman *samankokoisuutta* voidaan lisäksi korostaa kuviossa kaarimerkinnällä, jossa on esimerkiksi yksi, kaksi tai kolme kaarta vierekkäin, jolloin kulmia ei



Kuva 2.3: Yhdenmuotoiset kolmiot ABC ja DEF sekä neliö $KLMN$.

tarvitse välttämättä nimetä. *Suoraakulmaa* eli 90 asteen (°) kulmaa korostetaan kuvion kulmassa kaaren sijaan pienellä neliöllä.

2.2 Geometrian peruskäsitteitä

Määritellään seuraavaksi tutkielman kannalta oleellisia geometrian käsitteitä.

Piste on geometriassa määrittelemätön perustavanlaatuinen suure, jolla on paikka mutta ei ulottuvuutta. Geometrisia kuvioita, kuten suoria ja ympyröitä, voidaan pitää pisteiden kokoelmina eli joukkoina. Kaksi eri pistettä määräävät euklidisessa tasossa suoran, eli kahden pisteen kautta kulkee täsmälleen yksi suora. Tason kolme eri pistettä, jotka eivät ole samalla suoralla, määräävät yksikäsitteisesti tason. [Th, s. 313]

Euklidinen taso on tavallinen kaksiulotteinen taso, jossa pätee mm. euklidisen geometrian yhdensuuntaisuuspostulaatti (paralleeliaksiooma) [Th, s. 96]. Postulaatin sisältö on, että jos on annettuna suora ja sen ulkopuolinen piste, niin on olemassa toinen suora, joka kulkee annetun pisteen kautta leikkaamatta annettua suoraa. Postuloitu toinen suora on siis annetun suoran kanssa yhdensuuntainen. Eräs epäeuklidinen taso on puolestaan esimerkiksi kaksiulotteinen pallopinta, jossa sijaitsevat suorat ovat pallopinnan isoympyröitä. Suorien paralleeliaksiooma ei päde epäeuklidisessa tasossa, joten kaksi saman pallopinnan eri isoympyrää leikkaavat toisensa väistämättä. Myös kolmiulotteinen avaruus voi olla geometrisesti euklidinen tai epäeuklidinen. Tämä tutkielma käsittelee ainoastaan euklidista geometriaa eli niin sanotusti tavanomaista geometriaa, minkä lisäksi rajoitutaan lähes kokonaan kaksiulotteiseen tasoon.

Suora on geometriassa määrittelemätön perustavanlaatuinen suure, jolla on paikka sekä kaksi ulottuvuutta. Suora on ääretön *pisteiden joukko*, joka voidaan esittää euklidisessa geometriassa kahden tason välisenä leikkausviivana. [Th, s. 360] Esitetään seuraavaksi määritelmä kahden suoran väliselle sijaitsemiselle, myös lähteen [Th, s. 360] mukaisesti.

Määritelmä 2.1 (kahden suoran välinen sijainti)**.** Kahdelle *saman* tason suoralle k ja l pätee jokin seuraavista:

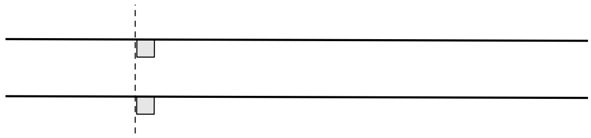
1) Suorien k ja l leikkaus on yksi piste P, jolloin suorien sanotaan *leikkaavan* toisensa pisteessä P (*leikkauspiste*).

2) Suorien k ja l leikkaus on tyhjä.

3) Suorien k ja l leikkauksessa on enemmän kuin yksi piste, jolloin suorien sanotaan *yhtyvän* toisiinsa.

Tapauksissa 2 ja 3 suorien sanotaan olevan *yhdensuuntaiset*. Tapauksessa 1 suorat voivat erikoistapauksessa leikata toisensa suorassa kulmassa, jolloin ne ovat toisiaan vastaan kohtisuoria ja toistensa *normaaleja*. Kahta avaruuden suoraa, jotka sijaitsevat *eri* tasoissa, sanotaan *ristikkäisiksi*.

Suorat ovat siis keskenään yhdensuuntaiset, jos niillä ei ole yhtäkään yhteistä pistettä. Yhdensuuntaisten suorien välinen (kohtisuora) etäisyys toisistaan on kaikkialla vakio. Lisäksi, jos suorat yhtyvät samaksi suoraksi, niin suora on yhdensuuntainen itsensä kanssa.



Määritelmä 2.2 (pisteen sivuaminen ja leikkaaminen)**.** Yksittäinen piste ja mielivaltainen käyrä *sivuavat* (tai *leikkaavat*) toisiaan, kun käyrä kulkee pisteen kautta.

Tässä tutkielmassa käsiteltäviä käyriä ovat esimerkiksi suorat ja ympyrät.

Määritelmä 2.3 (ympyrä)**.** Olkoon *ympyrän keskipiste* annettu. *Ympyrä* on kaikkien niiden *pisteiden joukko* (tai *ura*), jotka sijaitsevat *vakioetäisyydellä* (*säde*) ympyrän keskipisteestä. Ympyrän pisteet ovat ympyrän *kehäpisteitä*. Ympyrä voidaan täten määritellä yksikäsitteisesti

a) ympyrän keskipisteen ja säteen avulla tai

b) ympyrän keskipisteen ja jonkin kehäpisteen avulla tai

c) kolmen kehäpisteen avulla.

Määrittelyt a ja b antavat tarvittavat tiedot ympyrän konstruoimiseksi harpin avulla. Ympyrä voidaan toki konstruoida myös määrittelyn c nojalla, mutta piirtäminen on tällöin edellisiin verrattuna hieman työläämpää. Kohta c on itse asiassa Apollonioksen ongelman helpoin tapaus (ks. alaluku 3.1).

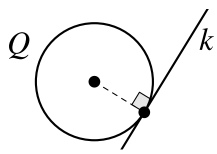
Huomautus. Ympyrän *säteen* vaaditaan yleensä olevan jokin äärellinen ja nollaa suurempi reaaliluku, eli luku joukosta $\mathbb{R}_+$ eli avoimelta väliltä $]0, \infty[$. Ympyrän käsitettä voidaan kuitenkin ajatella myös laajennetussa mielessä siten, että ympyrä on pienimmillään *piste* (nollasäteinen ympyrä) ja suurimmillaan *suora* (ääretönsäteinen ympyrä), jolloin siis säteen määrittelyjoukkoon lisätään alkiot nolla ja positiivinen ääretön.

Määritellään ääretönsäteinen ympyrä lähteen [Ros, s. 143] mukaisesti.

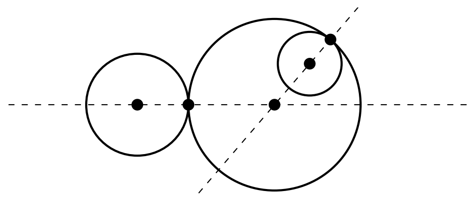
Määritelmä 2.4 (ääretönsäteinen ympyrä)**.** Suoraa voidaan pitää ympyrän rajatapauksessa *ääretönsäteisenä ympyränä*, kun annetaan ympyrän säteen kasvaa rajatta. Ympyrän kehän kaarevuus katoaa tällöin jokaisen kehäpisteen kohdalla, joten ympyräkaari oikenee suoraksi. Ympyrän keskipisteen ajatellaan tällöin loitontuvan äärettömän kaus ympyrän kehästä.

Apollonioksen ongelman *annettujen kuvioiden* ajatellaan tässä tutkielmassa olevan ympyröitä laajennetussa mielessä, jolloin annetun ympyrän säde kuuluu siis laajennettuun joukkoon $\mathbb{R}_+ \cup \{0, \infty\}$ eli suljetulle välille $[0, \infty]$. *Ratkaisuympyrän* säteen puolestaan vaaditaan kuitenkin kuuluvan perinteisen ympyräkäsityksen mukaisesti joukkoon $\mathbb{R}_+$, joten pistettä eikä suoraa ei hyväksytä tässä tutkielmassa ratkaisuympyräksi.

Määritelmä 2.5 (suoran ja ympyrän sivuaminen)**.** Suora k ja ympyrä Q *sivuavat* toisiaan, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Ainoa yhteinen piste on kuvioiden välinen *sivuamispiste*. Suoraa k sanotaan tällöin ympyrän Q *tangentiksi*. [Le1, s. 17] Ympyrää Q puolestaan voidaan sanoa suoran k *tangenttiympyräksi*. Tangentti k ja kuvioiden sivuamispisteeseen piirretty ympyrän Q säde ovat *kohtisuorassa* toisiaan vastaan.

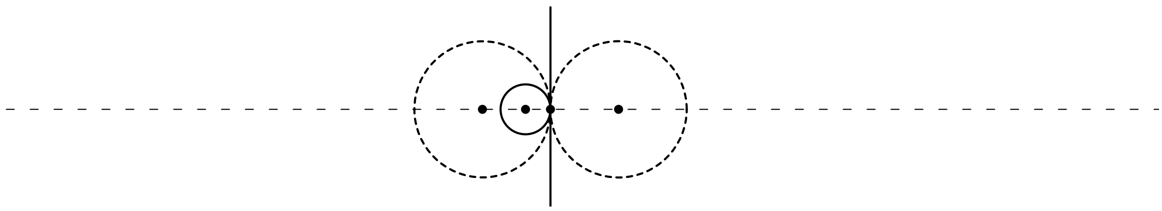


Määritelmä 2.6 (ympyröiden välinen sivuaminen)**.** Kaksi ympyrää *sivuavat* toisiaan, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste. Yhteinen piste on ympyröiden *sivuamispiste* [Le1, s. 17], ja se sijaitsee ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla. Toisiaan sivuavat ympyrät ovat toistensa *tangenttiympyröitä*.



Huomautus. Jos ajatellaan ympyrän käsitettä laajennetussa mielessä, jolloin suora on ääretönsäteinen ympyrä, niin suoran ja ympyrän sivuaminen on erityistapaus kahden ympyrän välisestä sivuamisesta: suoran muotoisen ääretönsäteisen ympyrän keskipiste sijaitsee tällöin sivuamispisteen ja äärellissäteisen ympyrän keskipisteen kautta kulkevalla suoralla (seuraavassa kuvassa harvalla katkoviivalla), sivuamispisteestä katsottuna äärettömyydessä.

Jos tällöin pienennetään ääretönsäteisen ympyrän sädettä, niin kyseinen suora muuttuu (tangenttiympyräänsä) joko *sisäisesti* tai *ulkoisesti* sivuavaksi ympyräksi (seuraavan kuvan katkoviivoitetut ympyrät). Kaksi äärellissäteistä ympyrää voivat nimittäin sivuta toisiaan joko ulkoisesti tai sisäisesti, mikä selitetään seuraavaksi.

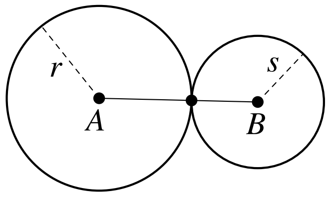


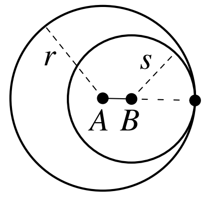
Määritelmä 2.7 (ympyröiden ulkoinen ja sisäinen sivuaminen)**.** Ympyrät (A, r) ja (B, s) sivuavat toisiaan *ulkoisesti*, jos niiden keskipisteiden A ja B välinen etäisyys on ympyröiden säteiden r ja s summa,

$$|AB| = r + s.$$

Ympyrät (A, r) ja (B, s) sivuavat toisiaan *sisäisesti*, jos niiden keskipisteiden välinen etäisyys on ympyröiden säteiden välisen erotuksen itseisarvo,

$$|AB| = |r - s|\,.$$

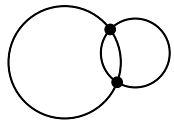




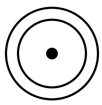
Huomautus. Ainoastaan *suljetut käyrät* voivat sivuta toisiaan ulkoisesti tai sisäisesti. Suljettu käyrä on sellainen käyrä, jota pitkin kulkemalla palataan takaisin lähtöpisteeseen. Suljettu käyrä rajaa tasossa sisäänsä alueen, jota käyrä ympäröi tason jokaisella suunnalla. Suljettu käyrä voi myös leikata itsensä, jolloin sen ympäröimiä alueita on vähintään kaksi. Ympyröiden lisäksi suljettuja käyriä ovat esimerkiksi monikulmiot. Suora puolestaan ei ole suljettu käyrä, joten suora ei voi sivuta ympyrää sekä ulkoisesti että sisäisesti. Myöskään piste ei ole suljettu käyrä.

Suljettuja käyriä koskeva huomautus selittää osaltaan Apollonioksen ongelman ratkaisujen vaihtelevaa lukumäärää eri tapauksissa: Apollonioksen ongelman ratkaisu on nimittäin ympyrä, tangenttiympyrä, joka sivuaa kolmea annettua kuviota (pistettä, suoraa tai ympyrää), joten ratkaisuympyrä voi sivuta annettua *ympyrää* useammalla eri tavalla kuin esimerkiksi annettua *pistettä* (joka ei ole suljettu käyrä).

Määritelmä 2.8 (ympyröiden leikkaaminen)**.** Kaksi ympyrää *leikkaavat* toisensa, kun niillä on täsmälleen kaksi yhteistä pistettä.



Määritelmä 2.9 (samankeskiset ympyrät)**.** Ympyrät ovat *samankeskiset*, jos niillä on yhteinen keskipiste. Tällöin ympyröiden keskipisteet yhtyvät, joten niiden välinen etäisyys on nolla.



Kaksi ympyrää voivat sijaita toisiinsa nähden siispä monella eri tapaa. Esitetään seuraavassa taulukossa kahden ympyrän (A, r) ja (B, s) mahdolliset sijainnit toisiinsa nähden. Oletetaan aluksi, että säde $r > s$.

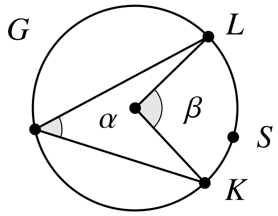
Ympyröiden sijainnit toisiinsa nähden	Yhteisiä pisteitä	Keskipisteiden välinen etäisyys $\|AB\|$
erilliset ympyrät toistensa ulkopuolella	0	$\|AB\| > r + s$
toisiaan ulkoisesti sivuavat ympyrät	1	$\|AB\| = r + s$
toisensa leikkaavat ympyrät	2	$r - s < \|AB\| < r + s$
toisiaan sisäisesti sivuavat ympyrät	1	$\|AB\| = r - s$
sisäkkäin olevat erilliset erikeskiset ympyrät	0	$0 < \|AB\| < r - s$
sisäkkäin olevat samankeskiset ympyrät	0	$\|AB\| = 0$, eli $A = B$

Oletetaan sitten, että ympyrät (A, r) ja (B, s) ovat *samankokoiset* $(r = s)$. Tällöin ympyröiden keskipisteiden lähestyessä toisiaan ympyrät *yhtyvät* leikkaamisen jälkeen, joten samankokoiset ympyrät voivat täten olla:

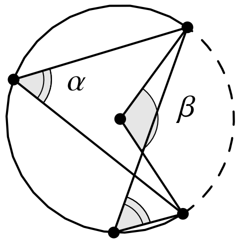
- erilliset ympyrät toistensa ulkopuolella,
- toisiaan ulkoisesti sivuavat ympyrät,
- toisensa leikkaavat ympyrät, tai
- yhtyneet ympyrät eli sama ympyrä.

Samankokoiset ympyrät eivät siis voi sijaita sisäkkäin eivätkä myöskään sivuta toisiaan sisäisesti.

Määritelmä 2.10 (ympyräkaarta vastaavat kehäkulma ja keskuskulma)**.** Olkoon ympyrän G ympyräkaari KSL annettu (missä $K \neq L$). *Ympyräkaarta vastaava kehäkulma* α on kulma, jonka kärkipiste on mielivaltainen ympyrän G piste (kunhan erisuuri kuin kaaren päätepisteet), ja kulman kylkien päätepisteet ovat ympyräkaaren päätepisteet K ja L. Kehäkulman suuruus on välillä $0\ ° < \alpha < 360\ °$. *Ympyräkaarta vastaava keskuskulma* β on kulma, jonka kärkipiste on ympyrän G keskipiste, ja kylkien päätepisteet ovat vastaavasti ympyräkaaren päätepisteet K ja L. Keskuskulman suuruus on välillä $0\ ° < \beta < 360\ °$.

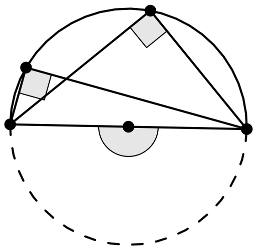


Lause 2.11 (kehäkulmalause)**.** *Samaa ympyrän kaarta (kuvassa katkoviivalla) vastaaville kehäkulmille α ja keskuskulmalle β pätee aina, että kehäkulma on puolet keskuskulmasta, eli $\alpha = \beta/2$. [Th, s. 187]*



Kehäkulmalauseella on eräs merkittävä erikoistapaus, *Thaleen lause*.

Seuraus 2.12 (Thaleen lause)**.** *Puoliympyrän kaarta (keskuskulmana oikokulma 180 °) vastaava kehäkulma on aina suorakulma (90 °). [Th, s. 187] Lisäksi käänteisesti pätee, että suorakulmaisen kolmion hypotenuusa on suorakulmaisen kolmion ympärysympyrän halkaisija.*



2.3 Inversio ympyrän suhteen

Inversio ympyrän suhteen on *geometrinen kuvaus* (englanniksi *a geometrical transformation*), valitun ympyrän tasossa. Ympyrää, jonka suhteen kuvaus tehdään, kutsutaan *inversioympyräksi*. Inversioympyrän keskipiste on *inversiokeskus*. Inversio kuvaa tason kaikki pisteet (lukuun ottamatta inversiokeskusta) takaisin samaan tasoon tietyllä kuvaussäännöllä, joka kohta esitetään. Yleensä merkitään, että piste P kuvautuu pisteeksi P', ja sanotaan, että P' on alkuperäisen pisteen *P kuva*. Inversiokeskus on tason ainoa piste, jolle inversion kuvaussääntö *ei* määrittele kuvaa. Inversiokeskuksella on inversiokuvauksessa myös muita erikoisominaisuuksia. [Cou, s. 140–143] Tutkielmassa käytetään edellä esitettyä termistöä. Inversiokuvausta voidaan tosin sanoa myös esimerkiksi *käänteissäteiseksi muunnokseksi* [Ros, s. 138].

Inversiokuvausta voidaan sanoa lisäksi *ympyräpeilaukseksi* [Le1, s. 51]. Esimerkiksi GeoGebra-ohjelmassa voidaan piirtää pisteen inversiopiste kätevästi työkalulla "peilaus ympyrän suhteen". Kyseisellä työkalulla valitaan ensin kuvattava piste X ja sitten (inversio)ympyrä, jonka suhteen ohjelma piirtää inversiopisteen X'. "Peilaaminen ympyrän suhteen" tuo mieleen kaarevat pallopeilit sekä ajatuksen, että olisiko niiden kuvajaisen muodostumisella jotakin yhteistä inversion kanssa. Ajatus menee kuitenkin harhaan, sillä inversion kuvaussääntö ei noudata tavallisen pallopeilin fysikaalisia kuvaussääntöjä [Le3, s. 269–276]. Käytetään siksi peilauksen sijaan termiä kuvaus (ja peilaamisen sijaan kuvaamista), sillä inversio on kuvaus ympyrän suhteen.

Inversiokuvaus toimii kaksiulotteisen tason lisäksi kolmiulotteisessa avaruudessa. Tällöin kuvaus tehdään ympyrän sijaan pallon suhteen, jolloin inversiokeskuksena toimii luonnollisesti inversiopallon keskipiste (origo). Inversio kuvaa pallon ulkopuoliset pisteet pallon sisälle ja pallon sisäpuoliset pisteet vastaavasti pallon ulkopuolelle. Pallopinnan pisteet pysyvät kuvauksessa paikoillaan. Inversiokeskukselle ei ole määritelty kuvaa. Kuvaussäännöt kolmiulotteiselle avaruudelle ja inversiopallolle ovat (täysin vastaavat kuin tason ja inversioympyrän kuvaussäännöt): origon kautta kulkeva suora kuvautuu itselleen, origon kautta kulkematon suora kuvautuu origon kautta kulkevaksi ympyräksi, ja origon kautta kulkematon ympyrä kuvautuu origon kautta kulkemattomaksi ympyräksi (vrt. lause 2.14). Jos suoraa pidetään ääretönsäteisenä ympyränä, niin inversio kuvaa tasossa kaikki ympyrät ympyröiksi. Inversion voidaan siksi sanoa olevan *ympyräuskollinen* tai *ympyräsukuinen* kuvaus [Ros, s. 143]. Inversio säilyttää kuvauksessa lisäksi avaruuden pallot palloina ja tasot tasoina. [Th, s. 155–156]

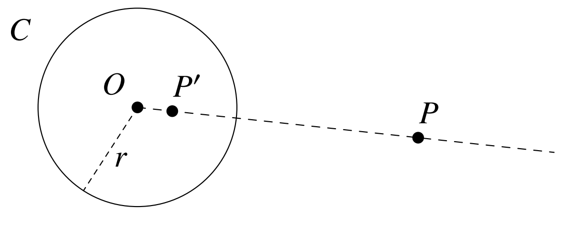
Inversio kuvauksena tasossa

Inversiolla on monia kiinnostavia ominaisuuksia, joista vain osa tulee tässä tutkielmassa ilmi. Inversiosta voikin siksi halutessaan löytää mainiota lisätietoa ja harjoitustehtäviä esimerkiksi oppikirjasta [Ros, s. 138–159], joka on syntynyt *Erkki Rosenbergin* Helsingin yliopistossa (ja sitä ennen Teknillisessä korkeakoulussa) pitämien geometrian kurssien luentojen pohjalta. Kyseisessä teoksessa puhutaan inversiosta käänteissäteisenä muunnoksena.

Tämä alaluku noudattelee asiasisällöllisesti pääasiassa lähdettä [Cou, s. 140–143], minkä lisäksi on paikoitellen käytetty myös muita lähteitä.

Määritelmä 2.13. Olkoon C ympyrä, jonka keskipiste on O (inversiokeskus) ja säde r. Kuvataan piste $P \neq O$ inversiolla *ympyrän C suhteen*. Kun piste P' on pisteen P *inversiopiste* eli *kuva*, niin P' sijaitsee inversiokeskuksesta lähtevällä puolisuoralla OP siten, että

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2 \qquad (\text{kun } P, P' \neq O).$$



Inversio ympyrän suhteen kuvaa *yksikäsitteisesti* kaikki valitun inversioympyrän $C = (O, r)$ tasossa olevat pisteet takaisin samaan tasoon, kunhan jätetään inversiokeskus O pois kuvauksen määrittely- ja arvojoukoista. Inversio on kuvauksena *involuutio* eli *itsensä käänteiskuvaus*, joten pisteet P ja P' ovat *toistensa* käänteisalkiot eli inversiopisteet (engl. inverse points) ympyrän C suhteen [Th, s. 344]. Englanninkielinen sana *inverse* tarkoittaakin *käänteistä*, mikä on involutiiviselle kuvaukselle luonnollinen ominaisuus. Inversio on myös tason pisteiden joukon (pois lukien inversiokeskus) *bijektio* itselleen [Le1, s. 51]. Kuvauksen ominaisuuksia ajatellen involuutio on kuitenkin *enemmän* kuin bijektio (kaikki involuutiot ovat myös bijektioita; vain jotkut bijektioista ovat involuutioita), joten järkevintä on puhua involuutiosta.

Inversion kuvausyhtälö ei siis määrittele lainkaan inversiokeskuksen O kuvapistettä. On kuitenkin selvää, että pisteen P lähestyessä inversiokeskusta O, kuvapiste P' loitontuu puolisuoralla OP yhä kauemmas ja kauemmas inversiokeskuksesta. Tästä syystä pisteen O inversiopisteen voidaan sanoa olevan *piste äärettömyydessä*. Inversiokeskuksen kautta kulkeva kuvio kuvautuu siksi äärettömyyteen asti ulottuvaksi kuvioksi eli esimerkiksi suoraksi. Kokeillaan, mitä tapahtuu, jos yritetään kuvata inversiokeskus O inversiolla (kuvataan pistettä $P = O$) ympyrän C suhteen. Tällöin inversiokeskukselle pitäisi päteä

$$|OP| = |OO| = 0 \quad \Rightarrow \quad |OP'| = \frac{r^2}{|OP|} = \frac{r^2}{0},$$

mitä ei ole määritelty, koska *nollalla ei voida jakaa*. Siispä inversiokeskukselle ei voida määritellä kuvaa, joka toteuttaisi kuvaussäännön.

Inversiokeskuksen O kuva on toisaalta topologisesti ajatellen yhden pisteen kompaktisoinnin äärettömyyspiste, koska äärettömyydessä olevan pisteen P_∞ voidaan katsoa olevan yksi piste: P_∞ on nimittäin yhden pisteen O kuva, ja P_∞:n kuvana on yksi piste O. Taso muistuttaa tällöin inversiokuvauksen kannalta palloa: pidetään inversiokeskuksena O esimerkiksi pallon pohjoisnapaa ja äärettömyyden pisteenä P_∞ pallon vastakkaista etelänapaa, jolloin etelänapa on pohjoisnavasta katsottuna pallon kaikista kauimmaisin piste, jonne saavutaan väistämättä, kuljettiinpa pohjoisnavalta poispäin mihin suuntaan hyvänsä. [Ros, s. 138] Joukko on topologisesti *kompakti*, jos se voidaan näin redusoida äärelliseksi [Th, s. 203].

Inversion määritelmästä seuraa, että inversio kuvaa inversioympyrän C ulkopuoliset pisteet ympyrän C sisäpuolelle: jos $|OP| > r$, niin $|OP'| < r$. Vastaavasti inversioympyrän C sisäpuoliset pisteet kuvautuvat ympyrän C ulkopuolelle: jos $|OP| < r$, niin $|OP'| > r$. Ainoat tason pisteet, jotka pysyvät inversiokuvauksessa paikallaan, ovat inversioympyrän C kehäpisteet, jolloin $P = P'$. Inversioympyrän kehäpisteitä voidaan siksi sanoa inversiokuvauksen kiintopisteiksi [Le1, s. 51].

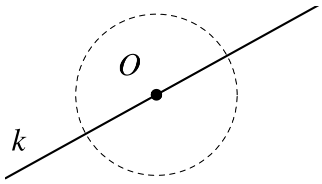
Miten inversio kuvaa suorat ja ympyrät

Inversio kuvaa suorat ja ympyrät toisiksi suoriksi tai ympyröiksi. Seuraava lause todistuksineen pohjautuu lähteisiin [Cou, s. 142–144] ja [Le1, s. 51–52].

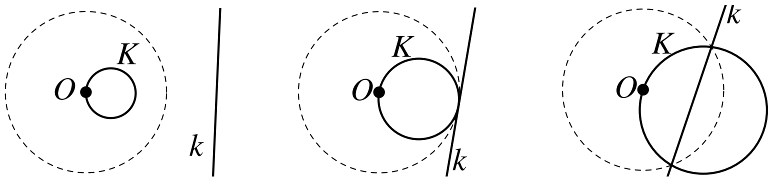
Lause 2.14. *Olkoon ympyrä $C = (O, r)$ annettu inversioympyrä, jolloin inversiokeskus on O. Inversio ympyrän C suhteen kuvaa suorat ja ympyrät seuraavasti:*

a)	*O:n kautta kulkeva suora k*	$\longrightarrow$	*O:n kautta kulkeva suora k*
b)	*O:n kautta kulkematon suora k*	$\longrightarrow$	*O:n kautta kulkeva ympyrä K*
c)	*O:n kautta kulkeva ympyrä K*	$\longrightarrow$	*O:n kautta kulkematon suora k*
d)	*O:n kautta kulkematon ympyrä T*	$\longrightarrow$	*O:n kautta kulkematon ympyrä T'*

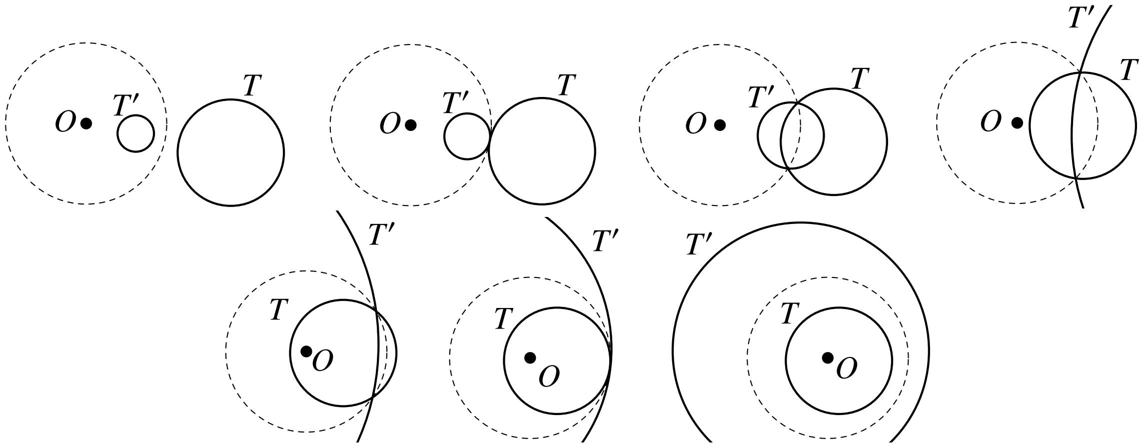
missä piste O jätetään pois kuvauksen määrittely- ja arvojoukoista (inversion määritelmän kuvaussäännön vuoksi), joten piste O jätetään siksi pois myös piirrettävistä kuvioista. Kohdissa b ja c ympyrän K halkaisija, jonka päätepiste on O, on kohtisuorassa suoraa k vastaan. Kohdassa d ympyröiden T ja T' keskipisteet sekä inversiokeskus O sijaitsevat samalla suoralla.



Tapaus a.



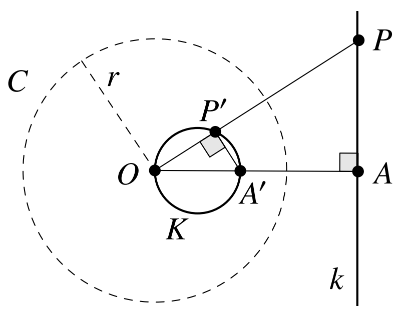
Tapaukset b *ja* c*: keskenään käänteiset.*



Tapaus d*: Inversiokeskus O ympyrän T* ulkopuolella *ja* sisällä.

Todistus. `Kohta a:` Olkoon k inversiokeskuksen O kautta kulkeva suora. Inversion määritelmän mukaan kaikki pisteet, jotka sijaitsevat inversiokeskuksesta O lähtevällä puolisuoralla, kuvautuvat samalle puolisuoralle. Inversiokeskuksen kautta kulkeva suora k jakautuu O:n kohdalta kahdeksi puolisuoraksi, jotka kuvautuvat molemmat siis takaisin itselleen. Suora k kuvautuu siis suoraksi k.

`Kohta b:` Olkoon k inversiokeskuksen O kautta kulkematon suora. Piirretään normaali pisteestä O suoralle k. Normaali ja suora k leikkaavat pisteessä A, joka kuvautuu inversiolla ympyrän $C = (O, r)$ suhteen pisteeksi A'. Olkoon P mielivaltainen suoran k piste ja P' sen inversiopiste. Pisteistä muodostuu kaksi kolmiota, OAP (suorakulmainen) ja $OA'P'$, joilla on yhteinen kulma origossa.



Inversion määritelmän mukaan pätee

$$|OA'| \cdot |OA| = |OP'| \cdot |OP| = r^2,$$

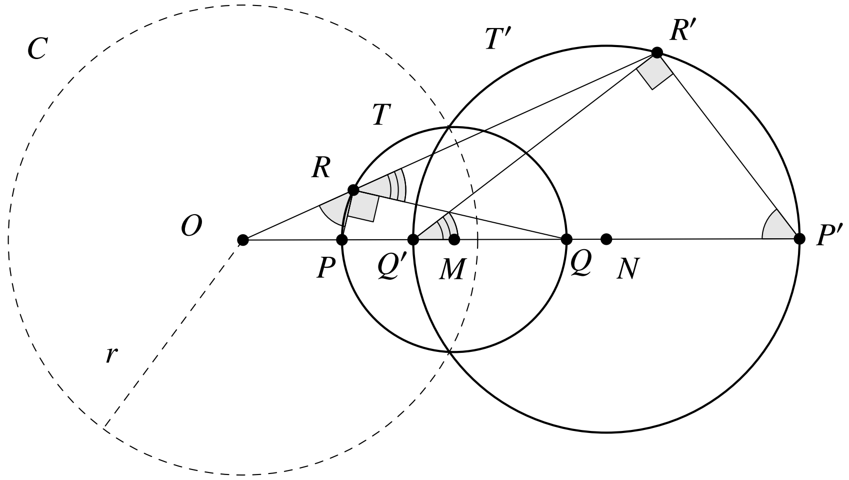
joten

$$\frac{|OA'|}{|OP'|} = \frac{|OP|}{|OA|}.$$

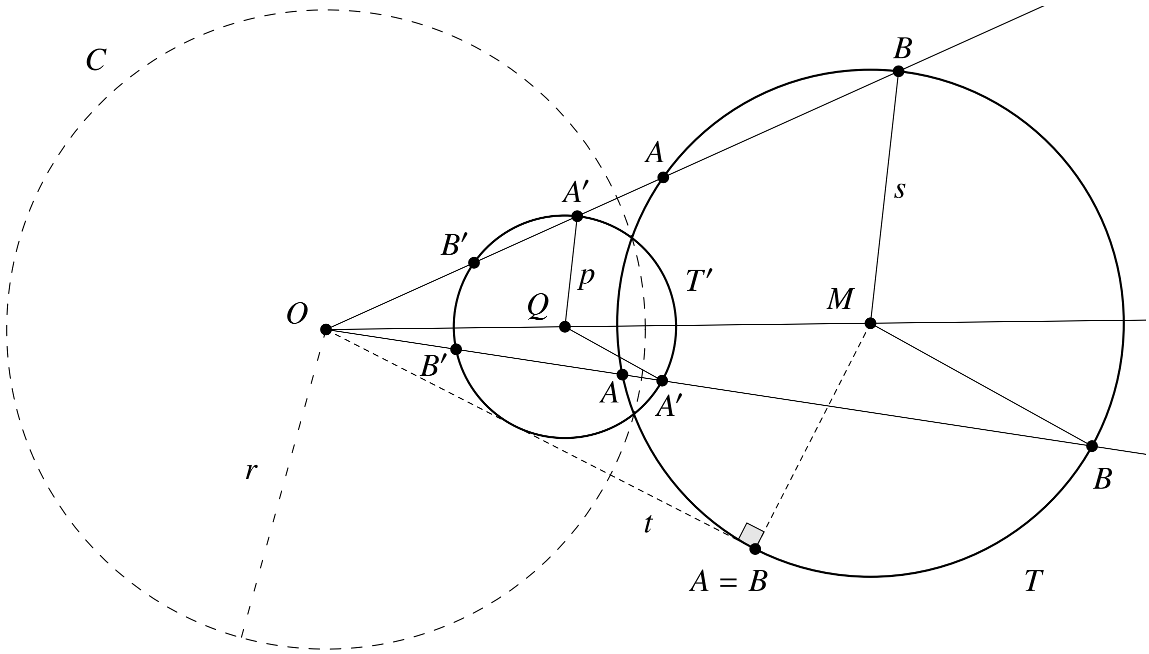
Tällöin sivu–kulma–sivuperiaatteen (sks) nojalla kolmiot OAP ja $OP'A'$ ovat *yhdenmuotoiset*: vastinsivuina $OA' \sim OP$ ja $OP' \sim OA$, ja vastinsivujen välissä oleva yhteinen kulma $\measuredangle AOP = \measuredangle P'OA'$ kärkenään inversiokeskus O. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\measuredangle OP'A' = \measuredangle OAP = 90\ ^\circ$. Huom. inversiolla kuvattavan kuvion *kiertosuunta* (inversiokeskuksen suhteen) vaihtuu, joten vaikka kolmioilla onkin yksi yhteinen kärki, niin kolmioiden vastinsivut sijaitsevat siksi eri suorilla. Piirretään kolmion $OP'A'$ kärkipisteiden kautta kulkeva ympyrä K. Koska janan OA' päätepisteistä lähtevä P'-kärkinen kulma $\measuredangle OP'A'$ on suorakulma, niin Thaleen lauseesta seuraa, että piste P' on sellaisen ympyrän kehällä, jolle jana OA' on *halkaisija*. Siis piste P' on OA'-halkaisijaisella ympyrällä $OP'A' = K$, joten ympyrä K on suoran k inversiokuva.

`Kohta c:` Olkoon K inversiokeskuksen O kautta kulkeva ympyrä. Koska inversio on involutiivinen kuvaus, niin kohta c seuraa käänteisesti kohdasta b. Kerrotaan kuitenkin pääkohdat (pisteiden nimet samoin kuin b-kohdassa). Olkoon OA' ympyrän K halkaisija ja P' kolmas ympyrän K piste (mielivaltainen, kunhan erisuuri kuin O ja A'). Thaleen lauseen nojalla kolmio $OA'P'$ on suorakulmainen, joten $\measuredangle OP'A' = 90\ ^\circ$. Kuvataan inversiolla ympyrän C suhteen pisteet A' ja P' pisteiksi A ja P, jolloin saadaan suora AP. Todetaan suorakulmaisten kolmioiden $OP'A'$ ja OAP yhdenmuotoisuus (sks) kuten kohdassa b. Näin on näytetty, että jokainen piste P sijaitsee pisteen A kautta kulkevalla suoralla $AP = k$, joka on kohtisuorassa ympyrän K halkaisijaa OA' vastaan. Siis suora k on ympyrän K inversiokuva.

`Kohta d, tapa 1:` Olkoon T inversiokeskuksen O kautta kulkematon M-keskinen ympyrä. Olkoon PQ ympyrän T halkaisija, joka sisältyy suoraan OM. Oletetaan, että O ei sijaitse halkaisijalla (todistus on muokattavissa tapaukseen, jossa inversiokeskus sijaitsisi halkaisijalla). Valitaan ympyrältä T kolmas piste R (mielivaltainen, kunhan erisuuri kuin P ja Q). Kolmio PQR on suorakulmainen, sillä Thaleen lauseen nojalla $\measuredangle PRQ = 90\ ^\circ$. Kuvataan pisteet P, Q ja R inversioympyrän $C = (O, r)$ suhteen pisteiksi P', Q' ja R'. Todetaan, että kolmiot OPR ja $OR'P'$ (joilla inversiokeskus yhteisenä kärkenä) ovat yhdenmuotoiset (sks), kuten todistuksissa b ja c. Samoin perustein myös $\triangle ORQ \sim \triangle OQ'R'$. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret, joten $\measuredangle ORP = \measuredangle OP'R'$ (yksi kaari, ks. kuva), ja $\measuredangle ORQ = \measuredangle OQ'R'$ ($**$, viitataan tähän myöhemmin). Koska R-kärkinen oikokulma ($180\ ^\circ$) muodostuu kolmesta vieruskulmasta, joista kulma PRQ on suorakulma, niin päätellään, että $\measuredangle ORP + \measuredangle QRR' = 90\ ^\circ$. Kulma QRR' on yhtä suuri kuin kulma $R'Q'P'$ (kolme kaarta), koska ne ovat yhtä suurten kulmien $**$ vieruskulmat (oikokulmissa, joiden kärjet R ja Q'). Kolmiosta $P'Q'R'$ tunnetaan siis jo kaksi kulmaa, joille pätee $\measuredangle R'Q'P' + \measuredangle R'P'Q' = 90\ ^\circ$. Kolmion kolmannen kulman $P'R'Q'$ on siis oltava *suorakulma*, koska kolmion kulmien summa on euklidisessa tasogeometriassa aina täsmälleen $180\ ^\circ$ (huom. R-kärkinen oikokulma koostuu samoista kulmista kuin kolmio $P'Q'R'$). Täten Thaleen lauseen nojalla piste R' sijaitsee sellaisella ympyrällä, jonka halkaisija on $P'Q'$, eli ympyrällä $T' = P'Q'R'$. Koska molempien ympyröiden T ja T' halkaisijat sijaitsevat suoralla OM, niin myös ympyröiden keskipisteet M ja N sijaitsevat samalla inversiokeskuksen O kautta kulkevalla suoralla OM. Siis (myös vastinpisteiden perusteella) ympyrä T' on ympyrän T inversiokuva.



`Kohta d, tapa 2:` Olkoon T inversiokeskuksen O kautta kulkematon M-keskinen ja s-säteinen ympyrä, eli $T = (M, s)$. Ympyrän T inversiokuvan hahmottelemiseksi piirretään pisteestä O lähtevä puolisuora, joka leikkaa T:n pisteissä A ja B. Kuvataan pisteet A ja B inversiolla ympyrän $C = (O, r)$ suhteen. Tutkitaan, millaisen uran kuvapisteet A' ja B' piirtävät, kun puolisuora OA leikkaa (ja sivuaa) ympyrän T mielivaltaisissa pisteissä eli käytännössä pyyhkäisee ympyrän T yli. Kuvaan on havainnollisuuden vuoksi piirretty puolisuora OA leikkauspisteineen kahteen eri asentoon. Sivuamispisteessä ($A = B$) puolisuora on ympyrän T tangenttina.



Tiedetään, että $s = |MB| = |MA|$. Merkitään janojen pituuksia $|OA|, |OB|, |OA'|, |OB'|$ ja $|OM|$ lyhyemmin kirjaimin a, b, a', b' ja m. Olkoon lisäksi t tangenttijanan pituus O:sta ympyrän T sivuamispisteeseen. Inversion määritelmän (määritelmä 2.13) mukaan

$$aa' = bb' = r^2.$$

Lisäksi, kun tarkastellaan *pisteen O potenssia* ympyrän T suhteen (pisteen potenssi vrt. [Le1, s. 26, 108–109]), niin tiedetään että

$$ab = t^2.$$

Jaetaan edelliset yhtälöt puolittain, ensimmäinen ($aa' = bb' = r^2$) jälkimmäisellä ($ab = ab = t^2$), niin saadaan

$$(*) \qquad \frac{a'}{b} = \frac{b'}{a} = \frac{r^2}{t^2} := h,$$

missä h on vakio, joka riippuu ainoastaan janojen pituuksista r ja t, ja on siis arvoltaan sama kaikille leikkauspisteiden A ja B sijainneille eli janojen pituuksille a, a', b ja b'.

Piirretään janan BM kanssa yhdensuuntainen pisteen A' kautta kulkeva suora, joka leikkaa suoran OM pisteessä Q (huom. Q *ei* siis ole M:n inversiopiste). Merkitään $|OQ| = q$ ja $|A'Q| = p$. Muodostettu kolmio OQA' on yhdenmuotoinen kolmion OMB kanssa, sillä kkk-perustelun mukaan niillä on yhtä suuret kulmat: yhteinen O-kärkinen kulma sekä samankohtaiset kulmat yhdensuuntaisten suorien leikkauspisteissä. Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinjanojen pituuksien suhteet ovat keskenään samat eli

$$\frac{q}{m} = \frac{a'}{b} = \frac{p}{s}.$$

Saadaan yhtälöt

$$\frac{q}{m} = \frac{a'}{b} \quad \text{ja} \quad \frac{p}{s} = \frac{a'}{b}.$$

Kerrotaan ensimmäinen yhtälö puolittain pituudella m ja toinen pituudella s, ja sijoitetaan yhtälöstä $*$ saatu vakio h

$$q = m\frac{a'}{b} = mh \quad \text{ja} \quad p = s\frac{a'}{b} = sh.$$

Täten siis

$$q = mh = |OM|\, h = |OQ| \quad \text{ja} \quad p = sh.$$

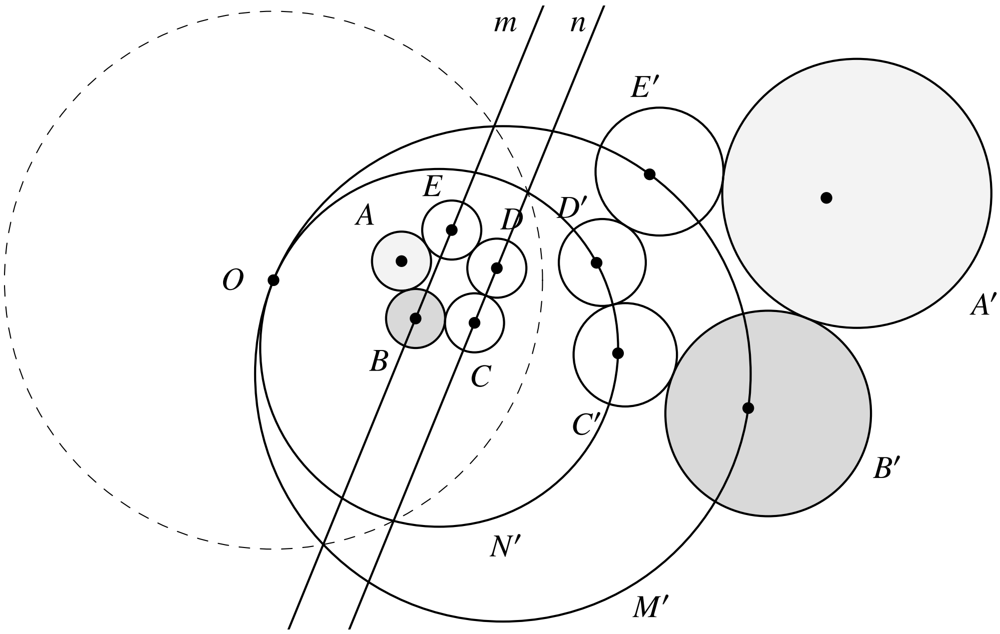
Saaduista yhtälöistä ensimmäinen tarkoittaa sitä, että Q on aina sama piste puolisuoralla OM, riippumatta pisteiden A ja B sijainneista (kunhan piste M eli ympyrän T *keskipiste* pysyy paikallaan). Jälkimmäinen saatu yhtälö tarkoittaa puolestaan sitä, että janan pituus p on aina sama, myöskin riippumatta pisteiden A ja B sijainneista (kunhan janan pituus s eli ympyrän T *säde* pysyy ennallaan).

Lisäksi pisteiden A ja B roolit vaihtamalla, eli piirtämällä yhdenmuotoiset kolmiot OMA ja OQB', saataisiin vastaavasti sama piste Q sekä sama janan pituus $|B'Q| = p$, koska yhtälön $*$ mukaan $a'/b = b'/a$.

Siispä kaikkien ympyrällä T sijaitsevien pisteiden A ja B kuvapisteet A' ja B' sijaitsevat vakioetäisyydellä p pisteestä Q. Täten ympyrän T inversiokuva on Q-keskinen ja p-säteinen ympyrä $T' = (Q, p)$. □

On siis todistettu inversion kuvaussäännöt ympyröiden ja suorien suhteen. Näytetään seuraavaksi, miten suorista ja ympyröistä koostuva monimutkaisempi kuviorykelmä kuvautuu, jolloin voidaan tutkia kuvioiden välisiä suhteita kuvauksessa.

Esimerkki 2.15. Piirretään viisi keskenään samankokoista ympyrää (A, B, C, D ja E), joiden keskipisteet sijaitsevat säännöllisen viisikulmion kärjissä, ja sivuamispisteet viisikulmion sivujen keskipisteissä. Piirretään viisikulmion kärkien kautta kulkevat yhdensuuntaiset suorat m (ympyröiden B ja E keskipisteiden kautta) ja n (ympyröiden C ja D keskipisteiden kautta). Sijaitkoon inversiokeskus O erillään koskematta kuvioihin. Kuvataan ympyrät A–E ja niiden nimeämättömät keskipisteet sekä suorat m ja n inversioympyrän O suhteen (ks. kuva 2.4). Ympyröiden inversiokuvat eli ympyrät A', B', C', D' ja E' sivuavat toisiaan (sivuaminen säilyy). Ympyröiden erikseen kuvatut keskipisteet *eivät* sijaitse enää kuvaympyröiden keskellä, joten kutsutaan niitä epäkeskipisteiksi. Yhdensuuntaiset (inversiokeskuksen kautta kulkemattomat) suorat m ja n kuvautuvat ympyröiksi M' ja N', jotka sivuavat inversiokeskusta ja kulkevat epäkeskipisteiden (alkuperäisten ympyröiden keskipisteiden inversiopisteiden) kautta. Myös alkuperäisten suorien ja ympyröiden väliset leikkauspisteet kuvautuvat inversiokuvien leikkauspisteiksi (ei merkitty kuvaan). Inversiokuvaus täten siis säilyttää kaikki leikkauspisteet ja sivuamispisteet.



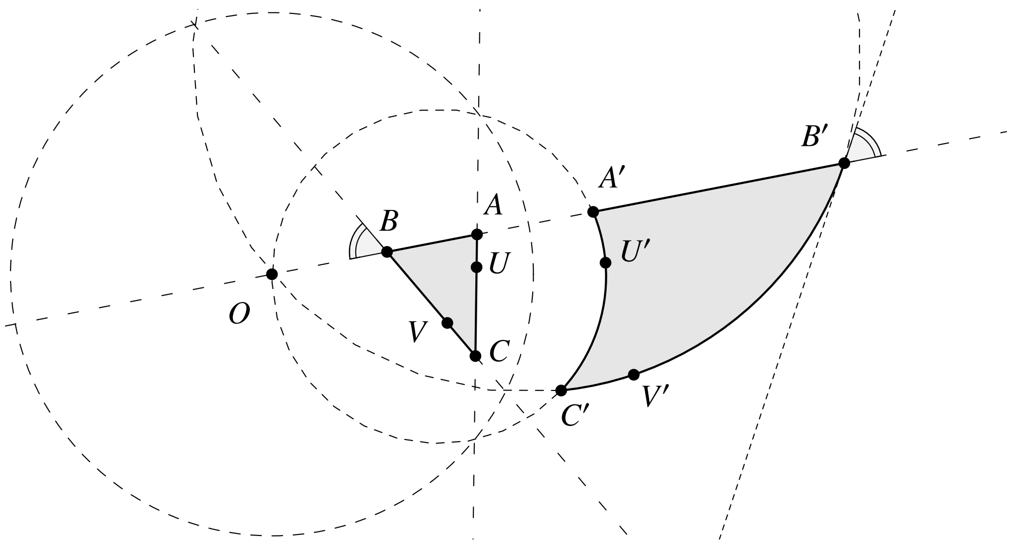
Kuva 2.4

Inversioympyrän O säteen pituus vaikuttaa muodostuvien inversiokuvien *kokoon* ja mahdollisesti myös inversiokuvien *etäisyyteen inversiokeskuksesta*. Kuvion tai kuviorykelmän inversiokuvat ovat kuitenkin aina keskenään *yhdenmuotoiset*, riippumatta inversioympyrän säteestä. Vertaa esimerkiksi kuvan 2.4 samankokoisia ympyröitä A–E (jotka sijaitsevat yksittäin tarkasteltuna eri etäisyyksillä inversiokeskuksesta) ja niiden erikokoisia inversiokuvia (yhdenmuotoisia ympyröitä), tai suoria (m ja n) ja niiden inversiokuvia.

Esimerkki 2.16. Näytetään sitten, miten janoista muodostuva kolmio ABC kuvautuu inversiolla ympyrän O suhteen. Jana on osa suoraa, joten jana kuvautuu inversiolla käytännössä suoran mukana. Olkoon kolmion kylki AB inversiokeskuksesta lähtevällä puolisuoralla, joten kyseisen kyljen inversiokuva sijaitsee samalla puolisuoralla. Kolmion kyljet BC ja CA ovat inversiokeskuksen kautta kulkemattomilla suorilla, joten ne kuvautuvat ympyrän kaariksi. Katso kuva 2.5.

Invariantit ominaisuudet inversiossa

Kuviot säilyttävät inversiokuvauksessa tiettyjä ominaisuuksiaan, jolloin kyseisiä muuttumattomia ominaisuuksia kutsutaan (inversion) *invarianteiksi*. Tärkeä invariantti ominaisuus on *kulman säilyminen*. Tämä tarkoittaa sitä, että kaksi toisiaan leikkaavaa tai sivuavaa kuviota kuvautuvat inversiolla kuvioiksi, joiden välinen kulma on sama kuin alkuperäisillä kuvioilla. Ympyräkaarien välisellä kulmalla tarkoitetaan kaarien leikkaus- tai sivuamispisteeseen piirrettyjen tangenttien



Kuva 2.5

välistä kulmaa. [Cou, s. 158–160] Esimerkiksi kuvaan 2.5 on piirretty kolmion ABC kulman B ristikulma sekä sen inversiokuva eli kuvion $A'B'C'$ kulman B' ristikulma, jotka ovat yhtä suuret.

Muutamia tärkeitä esimerkkejä invariantteihin ominaisuuksiin liittyvistä tapauksista [Cou, s. 158–160]:

- Kun suorat tai ympyrät leikkaavat toisiaan *kohtisuorasti*, niin kohtisuoruus siirtyy myös inversiokuville (esim. kuvassa 2.4 suora m leikkaa kohtisuorasti ympyrän B, joten samoin tekevät myös M' ja B').

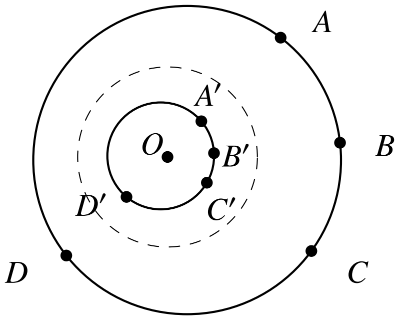
- Toisiaan *sivuavien* ympyröiden inversiokuvat sivuavat toisiaan (vrt. kuva 2.4). Tällöin ympyröiden sivuamispisteeseen piirretyt tangentit ovat keskenään *nollakulmassa* (kulma säilyy), jolloin ne yhtyvät samaksi suoraksi.

- Ympyrät, jotka sivuavat toisiaan inversiokeskuksessa, kuvautuvat inversiolla keskenään yhdensuuntaisiksi suoriksi (kuten kuvassa 2.5). Ympyröiden *ainoa* yhteinen piste on tällöin nimittäin inversiokeskus, joka on inversiokuvauksessa määrittelemätön "piste äärettömyydessä", mikä on johdonmukaista, sillä yhdensuuntaiset suorat eivät leikkaa toisiaan äärellisessä tarkasteltavassa tasossa.

- Ympyrät, jotka kulkevat inversiokeskuksen O kautta, ja sivuavat jotakin tason pistettä $A \neq O$, kuvautuvat inversiolla suoriksi, jotka kulkevat pisteen A' kautta.

Lisäksi inversio kuvaa suorat ja ympyrät toisiksi suoriksi ja ympyröiksi, joten inversio on *ympyräuskollinen* eli ympyrät säilyttävä kuvaus, kunhan suora käsitetään äärettömänsäteiseksi ympyräksi [Th, s. 155–156].

Huomautus. Inversio säilyttää kuvauksessa aina kuvion kulmien suuruudet, mutta *vaihtaa* yleensä kuvion *kiertosuunnan* (vrt. kuvassa 2.4 ympyräviisikot ja kuvassa 2.5 kolmiot). Kuvaus on kulmien säilyessä ja kiertosuunnan vaihtuessa *kääntäen konforminen*, tai kulmien ja kiertosuunnan säilyessä *(suoraan) konforminen* [Ros, s. 144]. Kuvion kiertosuunta kuitenkin poikkeuksellisesti säilyy inversiokuvauksessa, jos kuvio kuten ympyrän kehä sijaitsee inversiokeskuksen ympärillä (kuvassa O-keskinen inversioympyrä katkoviivalla sekä toistensa inversiokuvat eli ympyrät ABC ja $A'B'C'$) – mikä on suoraa konformisuutta ja siksi kummallista, koska lähteissä [Ros, s. 144] ja [Cou, s. 159] sanotaan inversion olevan nimenomaan kääntäen konforminen. Lähteiden yhtenäinen virheellisyys on kuitenkin oletettavasti epäuskottavaa, joten kirjoittaja lienee itse väärässä väittäessään keksineensä poikkeustapauksen.



2.4 Geometrinen piirtäminen harpilla ja viivaimella

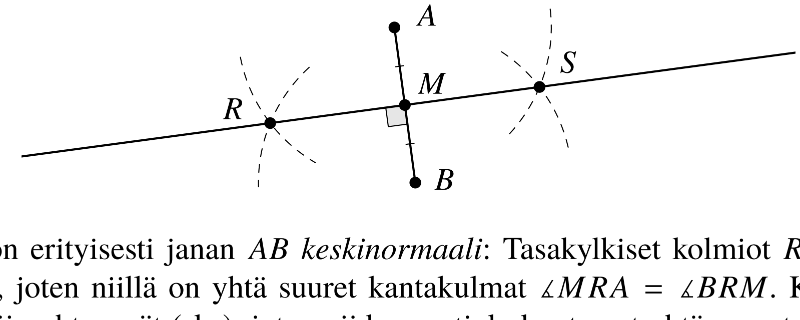
Harpilla ja viivaimella piirtämisen matemaattinen perusta nojaa euklidisen tasogeometrian aksioomiin. Piirtämisperiaatteista kaksi tärkeintä ovat: *Suora* piirretään *kahden pisteen* kautta (viivaimella). *Ympyrän* piirtämiseksi (harpilla) täytyy tuntea ympyrän *keskipiste* ja jokin ympyrän *kehäpiste* tai ympyrän *säteen* pituus. Nimittäin *harppipostulaatin* [Ros, s. 160] mukaan: "Annettu piste keskipisteenä voidaan piirtää ympyrä, joka kulkee toisen annetun pisteen kautta." Myös konstruktiotehtävä, jossa on annettu ympyrän keskipiste ja säde, palautuu harppipostulaattiin. Harppi–viivainkonstruktioiden etsittävät pisteet löytyvät suorien ja ympyröiden leikkauspisteistä. [Le1, s. 19–22]

Kiinnostavaa lisätietoa harpilla sekä viivaimella piirtämisestä suositellaan etsimään esimerkiksi oppikirjasta [Ros, s. 160–204], joka sisältää myös harjoitustehtäviä aiheesta. Kyseistä lähdettä ei kuitenkaan ole hyödynnetty enempää tässä alaluvussa, koska luku oli jo kirjoitettu lähteen löytyessä.

Esitetään seuraavaksi keinoja konstruoida tiettyjä haluttuja pisteitä tai kuvioita. Menetelmät on muisteltu ja päätelty suurelta osin kirjoittajan pohjatietojen varaisesti, jolloin lähdettä ei ole mainittu. Osa esitettävistä menetelmistä on toki löydetty lähdekirjallisuudesta, jolloin lähteisiin viitataan. Kaikkia seuraavia menetelmiä on käytetty tämän tutkielman lukuisten kuvien piirtämiseen. Tässä työssä on runsaat kolmesataa (ehkäpä 324) itse piirrettyä kuvaa.

Janan puolittaminen, janan keskinormaali sekä janan keskipiste

Olkoon puolitettava jana AB. Valitaan harpin säteeksi esimerkiksi $|AB|$ (kuitenkin vähintään puolet janan pituudesta); mitä suurempaa harpin sädettä käytetään, sitä helpompaa on piirtää tarkka piirros pitkän viivaimen avulla. Piirretään harpilla A- ja B-keskiset ympyrät, jotka leikkaavat toisensa pisteissä R ja S. Piirretään suora RS, joka leikkaa janan AB kyseisen *janan keskipisteessä M*.



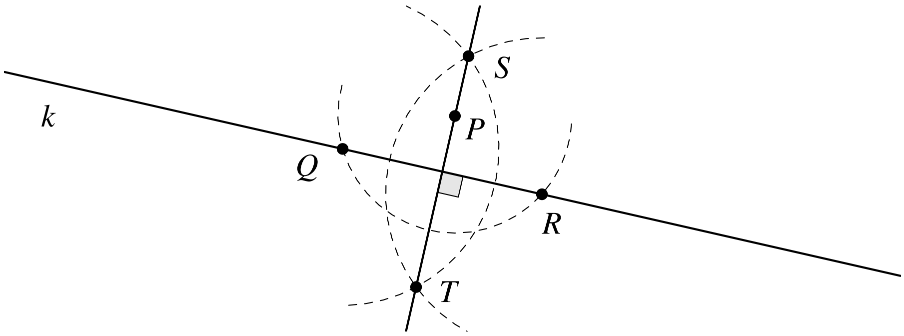
Suora RS on erityisesti janan AB *keskinormaali*: Tasakylkiset kolmiot RSA ja RSB ovat yhtenevät (sss), joten niillä on yhtä suuret kantakulmat $\measuredangle MRA = \measuredangle BRM$. Kolmiot RAM ja RBM ovat tällöin yhtenevät (sks), joten niiden vastinkulmat ovat yhtä suuret, kuten erityisesti

$\measuredangle AMR = \measuredangle RMB$ (vieruskulmat), minkä lisäksi kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkät, jolloin erityisesti $|AM| = |BM|$. Siis M on janan AB *keskipiste*, ja vieruskulmansa kanssa oikokulman muodostavat yhtä suuret kulmat ovat *suoria*. Siis suora RS on janan AB keskinormaali. [Le1, s. 21]

Janan keskipisteen etsimisen avulla saadaan siis *janan pituus puolitettua*. Samalla piirretty suora RS on *kohtisuorassa* janaa AB vastaan, joten suora ja jana ovat toistensa *normaalit* – lisäksi suora on janan *keskinormaali*. Normaalien välinen kulma on *suorakulma* eli 90 °.

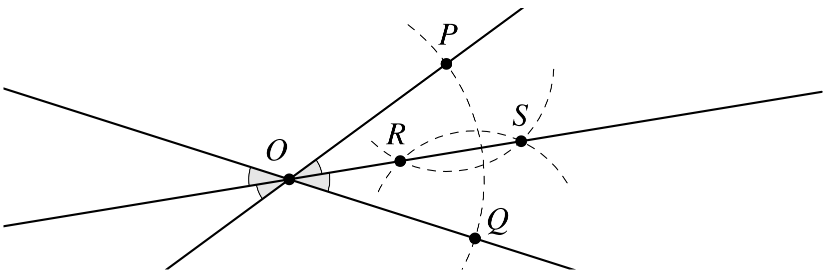
Normaali tietyn pisteen kautta ja suorakulma

Sijaitkoon piste P *suoralla* k tai *suoran* k *ulkopuolella*. Piirretään P-keskinen ympyrä, joka leikkaa suoran k pisteissä Q ja R. Piirretään janan QR keskinormaali (Q- ja R-keskiset samansäteiset ympyrät, niiden leikkauspisteet S ja T, sekä suora ST). Piste P kuuluu janan QR keskinormaalille ($P \in ST$), koska P-keskisen ympyrän säteet ovat yhtä pitkät $|PQ| = |PR|$. Piirretty keskinormaali on siis suoran k normaali, joka kulkee pisteen P kautta. [Le1, s. 21] Jos piste P on suoran k piste, niin P sijaitsee suoran ja normaalin *leikkauspisteessä*, jolloin $P \in k \cap ST$.

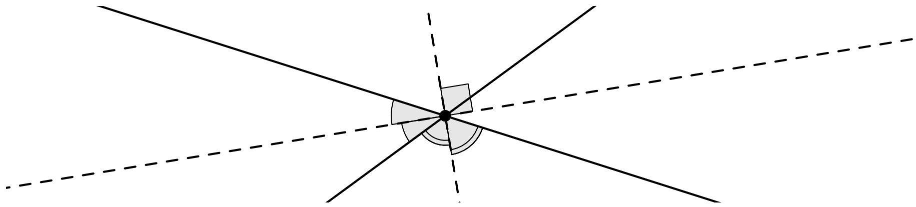


Kulmanpuolittaja

Olkoon piste O puolitettavan kulman kärki. Piirretään harpilla O-keskinen ympyrä, joka leikkaa kulman kyljet pisteissä P ja Q. Piirretään sitten janan PQ keskinormaali (P- ja Q-keskiset ympyrät samalla säteellä, niiden leikkauspisteet R ja S, sekä suora RS). Jos pidetään harpin säteenä koko ajan $|OP|$, osuu leikkauspiste R täsmälleen pisteeseen O (eli $R = O$), jolloin saadaan suunnikas $OPSQ$. Joka tapauksessa suora $RS = OS$ kulkee puolitettavan kulman kärjen eli pisteen O kautta. Kolmiot POR ja QOR (tai kolmiot POS ja QOS) ovat yhtenevät (sss), joten yhtenevien kolmioiden vastinkulmat ovat yhtä suuret, erityisesti $\measuredangle ROP = \measuredangle QOR$. Suora RS siis jakaa alkuperäisen kulman täsmälleen kahtia ja on täten tavoiteltu *kulmanpuolittaja*. [Le1, s. 22] Huom. kulmanpuolittaja RS puolittaa myös alkuperäisen kulman *ristikulman*.

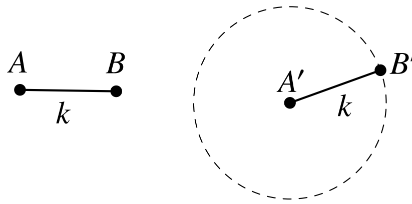


Kiinnostava fakta: Kaksi erisuuntaista suoraa leikkaavat toisensa jakaen tason neljään sektoriin (eksplementtikulmat yhteensä 360 °), eli muodostaen kaksi ristikulmaparia. Kummallekin ristikulmaparille on olemassa omat kulmanpuolittajansa (kuvassa katkoviivalla), jotka leikkaavat toisensa *kohtisuorasti*.

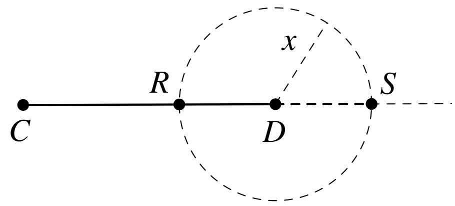


Janan siirtäminen, lyhentäminen ja pidentäminen

Olkoon *siirrettävä janan pituus* $|AB| = k$. Piirretään uuden janan ensimmäinen päätepiste A' haluttuun paikkaan. Otetaan harppiin säteeksi siirrettävän janan pituus k, ja piirretään A'-keskinen ympyrä. Siirretyn janan toinen päätepiste B' on mielivaltainen ympyrän kehäpiste.

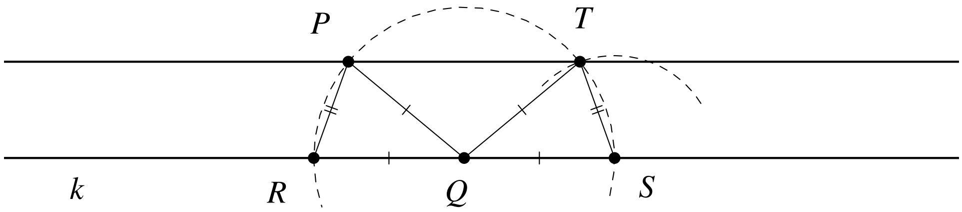


Janaa CD voidaan *lyhentää* tai *pidentää* halutun pituuden x verran piirtämällä janan toiseen päätepisteeseen (valitaan D) x-säteinen ympyrä. Ympyrä leikkaa janan CD pisteessä R ja janan jatkeen pisteessä S. Haluttu lyhennetty jana on CR ja pidennetty jana CS.

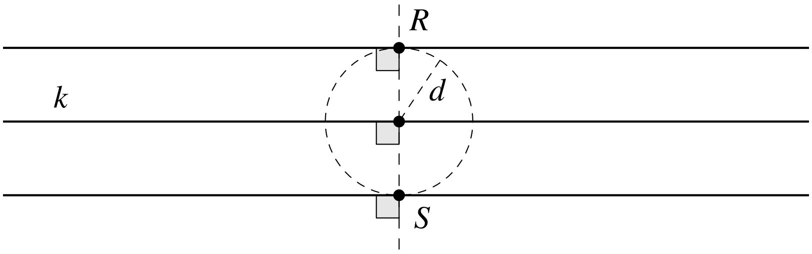


Yhdensuuntainen suora

Konstruoidaan suoran k kanssa yhdensuuntainen suora, joka *kulkee pisteen P kautta* ($P \notin k$). Piirretään suoralle k mielivaltainen piste Q (kuitenkin kauemmaksi pisteestä P kuin suoran lähin piste). Otetaan harppiin säteeksi $|PQ|$ ja piirretään Q-keskinen ympyrä, joka leikkaa suoran k pisteissä R ja S. Otetaan harppiin säteeksi $|PR|$ ja piirretään S-keskinen ympyrä, joka leikkaa Q-keskisen ympyrän (suoran k molemmin puolin). Olkoon pisteen P puolella suoraa oleva leikkauspiste T. Tasakylkiset kolmiot PQR ja TQS ovat yhtenevät, yhtä pitkien vastinsivujen takia (sss). Siispä pisteet P ja T ovat yhtä kaukana suorasta k, joten suora $PT \parallel k$.

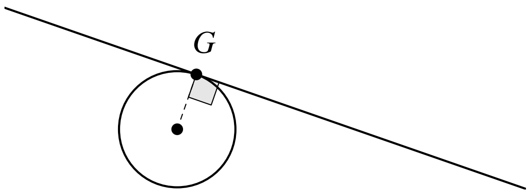


Näytetään seuraavaksi, miten piirretään suoran k kanssa yhdensuuntainen suora *tietyn etäisyyden d* päähän suorasta k. Piirretään suoran k mielivaltaiseen pisteeseen d-säteinen ympyrä. Piirretään suoran k normaali kulkemaan d-säteisen ympyrän keskipisteen kautta. Normaali leikkaa ympyrän pisteissä R ja S, jotka ovat halutulla etäisyydellä suorasta k. Pisteiden R ja S kautta kulkevat suoran k suuntaiset suorat voidaan konstruoida usealla eri tavalla: Tavoiteltava suora on nimittäin i) ympyrän tiettyyn pisteeseen piirretty *tangentti* sekä ii) normaalin tietyn pisteen kautta kulkeva *normaali*. Ympyrän tangentti piirretään tosin itse asiassa nimenomaan ympyrän sivuamispisteeseen piirretyn säteen normaalina (esitetään seuravaksi), joten on lopulta aivan sama, kummin päin tilannetta ajattelee. Lisäksi voidaan käyttää toki edellä esitettyä menetelmää (yhdensuuntainen suora tietyn pisteen kautta), mutta helpompaa on hyödyntää jo olemassa olevia apukuvioita (normaalia ja ympyrää).



Ympyrän tangentti

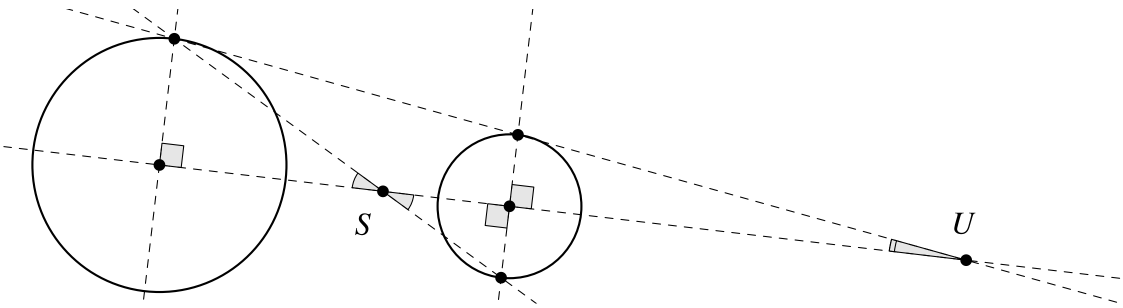
Ympyrää pisteessä G sivuava *tangentti* on sivuamispisteeseen G piirretyn *ympyrän säteen normaali*. Ympyrän säteen piirtämiseksi on tunnettava siis myös ympyrän keskipiste.



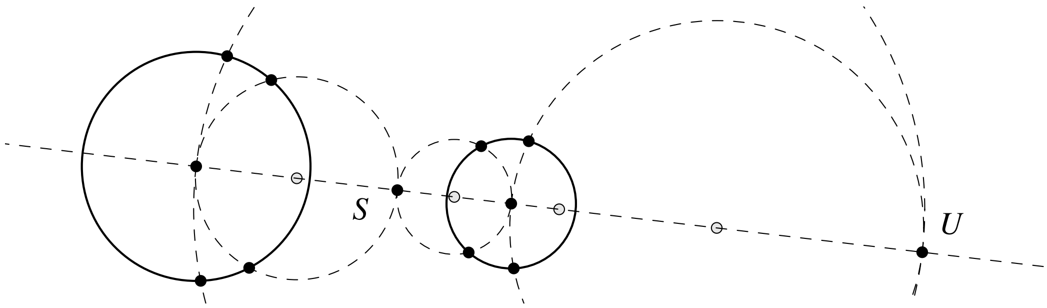
Yhteistangentit

Kutsutaan *kahdelle kuviolle* yhteisiä tangentteja *yhteistangenteiksi*. Yhteistangentteja konstruoidaan tässä tutkielmassa ympyrän ja suoran erilaisille pariyhdistelmille (YY, SY ja SS). Esitetään seuraavaksi kukin tapaus erikseen.

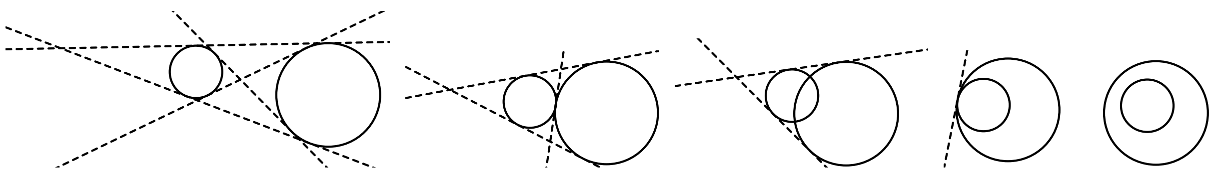
`Kahden ympyrän (YY) väliset yhteistangentit` vastaavat perinteistä tangenttikäsitystä, joten ne ovat ympyröitä sivuavia suoria, jotka lisäksi kulkevat ympyröille yhteisten *homotetiapisteiden* kautta: Jos ympyrät sijaitsevat erillään toisistaan ja toistensa ulkopuolella, niin ympyröiden välissä kulkevat kaksi yhteistangenttia leikkaavat toisensa ympyröiden *sisäisessä homotetiapisteessä*, ja kaksi muuta yhteistangenttia leikkaavat toisensa ympyröiden *ulkoisessa homotetiapisteessä*. Yhteistangentteja on olemassa tällöin siis yhteensä neljä. Homotetiapisteet sijaitsevat ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla. Homotetiapiste on sellainen piste (*homotetiakeskus*), josta katsottuna molemmat ympyrät *näyttävät* yhteneviltä eli samankokoisilta ja samanmuotoisilta. *Homotetia* on nimittäin *yhdenmuotoisuuskuvaus* [Le1, s. 48–49]. Homotetian ymmärtäminen ei kuitenkaan ole välttämätöntä yhteistangenttien piirtämisen kannalta. Esitetään homotetiapisteiden konstruoiminen lähteen [Ku, s. 40] mukaan (kyseinen artikkelilähde esittelee lisäksi erinomaisen havainnollisesti Apollonioksen ongelman ratkaisemisen mm. homotetian sekä hyperbelien avulla). Piirretään ympyröiden keskipisteitä sivuava suora. Piirretään keskipisteiden kautta kulkevat suoran normaalit. Piirretään normaalien ja ympyröiden välisten leikkauspisteiden kautta kulkevat kuvanmukaiset suorat, jotka leikkaavat ensimmäisen (keskipisteitä sivuavan) suoran etsityissä pisteissä, eli sisäisessä S ja ulkoisessa U homotetiapisteessä. Homotetiapisteet ovat keskenään yhdenmuotoisten suorakulmaisten kolmioiden kärkipisteitä perustelun kk nojalla (pääteltävissä jopa kkk).



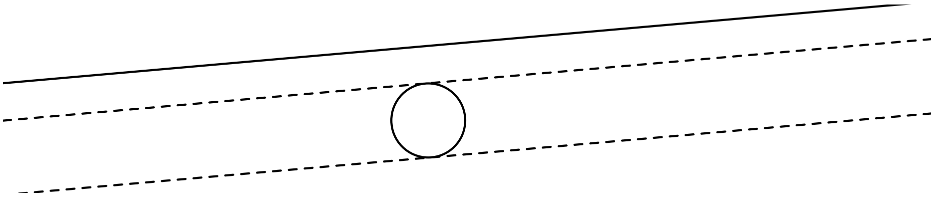
Yhteistangentit kulkevat homotetiapisteiden (S ja U) kautta ja sivuavat ympyröitä sivuamispisteissä, jotka konstruoidaan Thaleen lauseen nojalla: Ympyrän keskipiste ja homotetiapiste ovat halkaisijan päätepisteet sellaiselle apuympyrälle, joka leikkaa ympyrän etsityissä sivuamispisteissä. Etsitään siis kunkin ympyrän keskipisteen ja homotetiapisteen (S tai U) välisen janan keskipiste (kuvassa harmaat pisteet), jotka keskipisteinä piirretään halkaisijan päätepisteitä sivuavat (katkoviivoitetut) apuympyrät. Apuympyrän ja ympyrän väliset leikkauspisteet ovat etsityt sivuamispisteet. Yhteistangentti piirretään yhdistämällä homotetiapiste (S tai U) ja sen kanssa samalla apuympyrällä oleva leikkauspiste kyseisiä pisteitä sivuavalla suoralla.



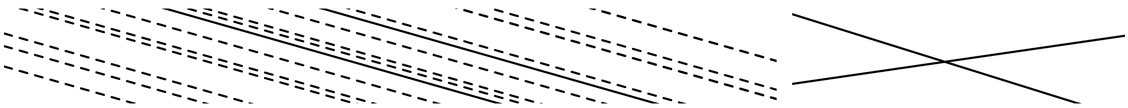
Kahden ympyrän välinen ulkoinen homotetiapiste on olemassa aina, paitsi silloin, jos ympyrät sijaitsevat sisäkkäin ja erillään toisistaan. Kahden ympyrän välinen sisäinen homotetiapiste on olemassa ainoastaan, jos ympyrät sijaitsevat toistensa ulkopuolella (joko erillään toisistaan tai sivuten toisiaan). Kahdella ympyrällä voi täten olla olemassa yhteistangentteja neljä, kolme, kaksi, yksi tai nolla (kuvassa katkoviivalla), riippuen ympyröiden keskinäisestä sijainnista.



`Suoran ja ympyrän (SY) väliset yhteistangentit` eivät puolestaan vastaa täysin ajatusta, että yhteistangentti sivuaisi kahta kuviota. Suora ei nimittäin voi sivuta toista suoraa. Hyväksytään kuitenkin suora–ympyräparin yhteistangenteiksi ympyrän tangentit, jotka ovat *suoran suuntaiset*. Tällaisia yhteistangentteja on olemassa enintään kaksi, yksi yhteistangentti (kuvassa katkoviivalla) ympyrän molemmin puolin. SY-kuvioparin kuvioiden välinen sijainti on yhteistangenttien kannalta merkityksetön, paitsi, jos suora sivuaa ympyrää, jolloin yhteistangentteja on olemassa vain yksi (koska suora ei voi olla itse oma yhteistangenttinsa).



`Kahden suoran (SS) välisiä yhteistangentteja` on olemassa vain, mikäli suorat ovat yhdensuuntaiset. Tällöin hyväksyttäviä yhteistangentteja ovat kaikki yhdensuuntaisen suoraparin kanssa *yhdensuuntaiset suorat* (kuvassa katkoviivalla), joita on olemassa ääretön määrä. Toisiaan leikkaavalle suoraparille ei siis ole olemassa yhteistangentteja.



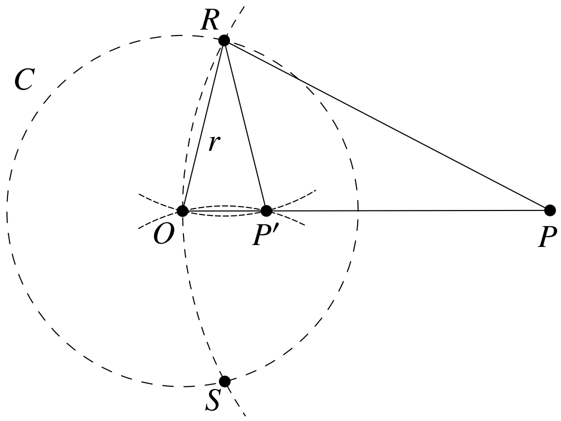
Pisteen inversiopiste

Esitetään seuraavaksi, miten piirretään pisteen P inversiopiste P' inversioympyrän C suhteen käyttäen ainoastaan harppia ja viivainta. Olkoon inversioympyrän keskipiste O ja säde r.

`Kuvattava piste inversioympyrän ulkopuolella`

Esitetään kaksi erilaista tapaa konstruoida inversiopiste P' inversioympyrän sisäpuolelle. Ensimmäinen tapa noudattaa lähdettä [Cou, s. 144–145].

`Tapa U1:` Sijaitkoon piste P ympyrän $C = (O, r)$ *ulkopuolella*, jolloin $|OP| > r$. Otetaan harppiin säteeksi $|OP|$, ja piirretään pistettä P keskipisteenä käyttäen kaari, joka leikkaa ympyrän C pisteissä R ja S. Nämä pisteet keskipisteinä piirretään r-säteiset kaaret, jotka leikkaavat sekä O:ssa että suoralla OP sijaitsevassa pisteessä P'.



Tasakylkisillä kolmioilla ORP ja ORP' on yhtä suuret kantakulmat, eli

$$\measuredangle ORP = \measuredangle POR = \measuredangle RP'O = \measuredangle P'OR,$$

joten kolmiot ovat *yhdenmuotoiset* (kk). Yhdenmuotoisuuden takia kolmioiden vastinsivujen pituuksien väliset suhteet ovat samat, joten

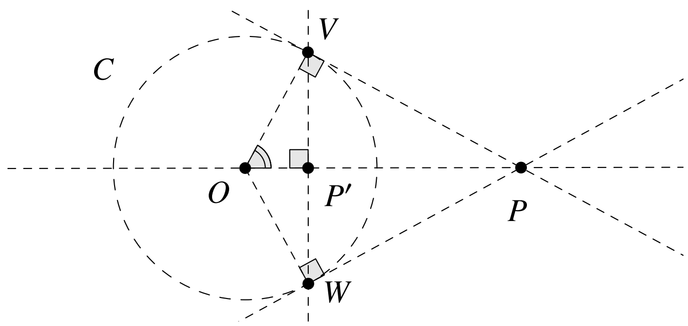
$$\frac{|OP|}{|OR|} = \frac{|OR|}{|OP'|}.$$

Koska $|OR| = r$, niin toisin sanoen

$$|OP| \cdot |OP'| = r^2. \tag{$\circledast$}$$

Siispä piste P' on inversion määritelmän mukaisesti inversiopiste pisteelle P. Edellä on hyödynnetty aiemmin mainitun lähteen lisäksi lähdettä [Le1, s. 52, 59].

`Tapa U2:` Inversiopiste P' voidaan konstruoida myös toisella tapaa, lähteen [Ros, s. 139] mukaisesti. Sijaitkoon piste P ympyrän $C = (O, r)$ *ulkopuolella*, jolloin $|OP| > r$. Piirretään pisteen P kautta kulkevat ympyrän C tangentit (Thaleen lauseen avulla). Olkoot tangenttien ja ympyrän sivuamispisteet V ja W. Suora VW leikkaa suoran OP etsityssä inversiopisteessä P'.



Todistetaan piirrosmenetelmän pätevyys yhdenmuotoisten kolmioiden avulla. Suorakulmaiset kolmiot OPV ja OVP' ovat yhdenmuotoiset, koska niillä on yhteinen O-kärkinen kulma sekä lisäksi yhtä suuret suorat kulmat (kk). Yhdenmuotoisten kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkät, joten saadaan verranto

$$\frac{|OP|}{|OV|} = \frac{|OV|}{|OP'|}$$

eli

$$|OP| \cdot |OP'| = |OV|^2 = r^2.$$

Täten P ja P' ovat inversion määritelmän mukaisesti toistensa inversiopisteet.

Kuvattava piste inversioympyrän sisäpuolella

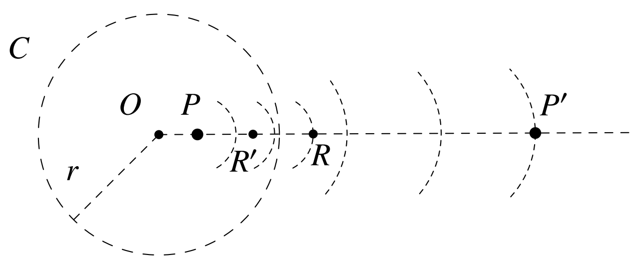
Esitetään edellisille menetelmille käänteiset tavat konstruoida inversiopiste P' inversioympyrän ulkopuolelle. Ensimmäinen tapa noudattaa lähdettä [Cou, s. 144–145].

Tapa S1: Sijaitkoon piste P ympyrän $C = (O, r)$ *sisäpuolella*, joten $|OP| < r$. Edellä esitetyn tavan U1 konstruktio ja todistus pätevät, kunhan $|OP|$-säteinen ja P-keskinen ympyrä *leikkaa* ympyrän C kahdessa pisteessä. Siis vaatimuksena on, että $|OP| > r/2$, sillä muutoin P-keskisen harpin $|OP|$-kaari ei yletä leikkaamaan ympyrää C. Menetelmä U1 toimii tässä tapauksessa täten ainoastaan välillä $r/2 < |OP| < r$, eli silloin kun piste P on sijaitsee lähempänä ympyrän C kehää kuin keskipistettä.

Jos kuvattava piste P sijaitsee inversiokeskuksesta O katsoen etäisyydellä $0 < |OP| \leq r/2$, niin täytyy käyttää seuraavaa apukeinoa. Etsitään ensiksi puolisuoralta OP sellainen ympyrän C *ulkopuolella* sijaitseva piste R, jonka etäisyys O:sta on $|OP|$:n kokonaislukuinen monikerta

$$(\star) \qquad |OR| = n \cdot |OP|,$$

missä $n \in \mathbb{Z}_+$ ja $|OR| > r$. Piste R löytyy helposti harpin avulla, kun otetaan harpin säteeksi $|OP|$



ja piirretään puolisuoralle OP pisteitä (harpin säteen välein), kunnes päästään inversioympyrän *ulkopuolelle*. Kuvan tapauksessa $|OR| = 4 \cdot |OP|$. Etsitään sitten ympyrän C ulkopuolisen pisteen R inversiopiste R' edellä esitetyllä (inversioympyrän ulkopuolella sijaitsevan pisteen) menetelmällä. Piste R' on piirretty kuvaan. Toistensa käänteispisteille R ja R' pätee

$$r^2 = |OR'| \cdot |OR| \stackrel{(\star)}{=} |OR'| \cdot (n \cdot |OP|) = (n \cdot |OR'|) \cdot |OP|,$$

josta poimitaan erityisesti yhtäsuuruus

$$(n \cdot |OR'|) \cdot |OP| = r^2.$$

Etsitylle inversiopisteelle P' pätee inversion määritelmän (vrt. yhtälö ⋇, joka on involuution ansiosta vertailukelpoinen) ja edellisen yhtälön mukaan

$$|OP'| = n \cdot |OR'|,$$

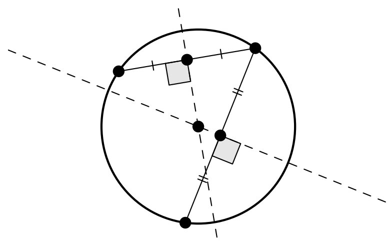
missä n on sama kokonaisluku kuin yhtälössä ⋆. Luku n kertoo, *monenko* $|OR'|$:n mittaisen janan jälkeen päästään (O:sta aloittaen) pisteeseen P'. Kuvan tapauksessa $|OP'| = 4 \cdot |OR'|$.

`Tapa S2:` Inversiopiste P' voidaan konstruoida inversioympyrän C ulkopuolelle myös täsmälleen käänteisesti tapaan U2 nähden. Sijaitkoon piste P ympyrän $C = (O, r)$ *sisäpuolella*, joten $|OP| < r$. Piirretään suora OP sekä sen normaali, joka kulkee pisteen P kautta. Normaali leikkaa ympyrän C pisteissä V ja W. Piirretään pisteiden V ja W kautta kulkevat ympyrän C tangentit, jotka leikkaavat toisensa ympyrän ulkopuolella etsityssä inversiopisteessä P'. Tavan U2 todistus pätee, kunhan vaihdetaan pisteiden P ja P' roolit.

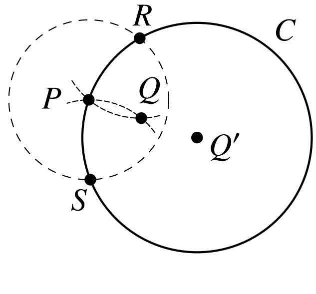
Ympyrän keskipiste

Ympyrän tuntematon keskipiste voidaan selvittää esimerkiksi kahdella seuraavalla tavalla. Menetelmistä ensimmäinen on kovin kätevä. Toinen menetelmä on teoreettisesti kiinnostava, mutta ehkä turhan vaivalloinen, mikäli keskipisteitä täytyy etsiä useita.

`Tapa 1:` Piirretään ympyrän kehälle mielivaltaiset kolme eri pistettä. Piirretään kahden pisteparin väliset keskinormalit. Keskinormaalit leikkaavat toisensa ympyrän *keskipisteessä*. Kyseinen leikkauspiste on nimittäin yhtä etäällä valituista mielivaltaisista pisteistä, koska janan keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janansa päätepisteistä [Ma, s. 29].



`Tapa 2:` Olkoon tiedossa ainoastaan ympyrän C kehä. Valitaan ympyrältä mielivaltainen piste $P \in C$. Piirretään P-keskinen mielivaltainen ympyrä, joka leikkaa ympyrän C pisteissä R ja S. Pidetään harpin säteenä yhä $|PR| = |PS|$, ja piirretään R- ja S-keskiset pisteen P kautta kulkevat ympyränkaaret, jotka leikkaavat myös pisteessä Q. Verrataan piirrettyä kuvio-



ta kuvaan (s. 29, tapa U1), jossa on konstruoitu ympyrän ulkopuolisen pisteen inversiopiste inversioympyrän sisälle. Huomataan siis, että etsitty ympyrän C tuntematon keskipiste on pisteen Q inversiopiste (P-keskisen ympyrän suhteen) eli Q'. [Cou, s. 145–146] Siispä jatko-ohje piirtämiseen on konstruoida pisteen inversiopiste.

Suoran, ympyrän, janan ja ympyräkaaren inversiokuvat

Suoran ja ympyrän kuvautuminen (inversiolla ympyrän suhteen) on selitetty lauseessa 2.14 sivulta 17 alkaen. Jana on osa suoraa, joten janat kuvautuvat suorien tavoin. Ympyräkaari puolestaan on osa ympyrää, joten ympyräkaaret kuvautuvat luonnollisesti ympyröiden tavoin. Katso janojen ja kaarien kuvautumista esittävä kuva 2.5 sivulla 23. Seuraavaksi esitettävät kuvioiden kontruoimisen ohjeet on päätelty käytännössä lauseen 2.14 perusteella.

`Suoran kuvaaminen:` Inversiokuvaus ympyrän $C = (O, r)$ suhteen voi kuvata *suoran* k joko 1) suoraksi k' tai 2) ympyräksi K'. 1) Jos suora k *kulkee* inversiokeskuksen O kautta, kuvautuu suora itselleen ($k' = k$), jolloin mitään piirtämistoimenpiteitä ei tarvita. 2) Jos suora k *ei kulje* inversiokeskuksen kautta, se kuvautuu inversiokeskusta sivuavaksi ympyräksi K'. Tällöin tunnetaan siis piirtämisen kannalta jo yksi inversiokuvan kehäpiste (eli sivuamispiste O, vaikka inversiokeskusta ei inversiokuvauksen kannalta olekaan määritelty). Piirretään suoralle lisäksi vähintään mielivaltaiset kaksi eri pistettä (tai varmuudeksi kolme; U, V ja W), ja kuvataan ne inversiolla ympyrän C suhteen. Etsitään inversiopisteiden määräämän kuvaympyrän $K' = U'V'W' = U'V'O$ keskipiste. Piirretään ympyrä K' keskipisteensä ja jonkin kehäpisteensä avulla. *Oikotie*: Jos inversiokeskuksen kautta kulkematon suora k leikkaa inversioympyrän C, niin kuvaympyrä K' kulkee suoran ja inversioympyrän leikkauspisteiden R ja S kautta (inversion kiintopisteet). Tällöin tiedetään siis jo valmiiksi ympyrän $K' = ORS$ kolme pistettä.

`Ympyrän kuvaaminen:` Inversiokuvaus ympyrän $C = (O, r)$ suhteen voi kuvata *ympyrän* H joko 1) suoraksi h' tai 2) ympyräksi H'. 1) Jos ympyrä H *kulkee* inversiokeskuksen O kautta, kuvautuu ympyrä suoraksi h', joka ei kulje inversiokeskuksen kautta. Piirretään ympyrälle mielivaltaiset kaksi eri pistettä (sellaiset M ja N, että $M \neq N$), ja kuvataan pisteet inversiolla ympyrän C suhteen. Piirretään inversiopisteiden määräämä suora $M'N'$. *Oikotie*: Jos ympyrä H leikkaa inversioympyrän C (leikkauspisteissä R ja S), niin ympyrän kuva on suora $h' = RS$. 2) Jos ympyrä H *ei kulje* inversiokeskuksen kautta, se kuvautuu inversiokeskuksen kautta kulkemattomaksi ympyräksi H'. Piirretään ympyrän kehälle mielivaltaiset kolme eri pistettä (D, E ja F), ja kuvataan ne inversiolla ympyrän C suhteen. Etsitään inversiopisteiden määräämän kuvaympyrän $H' = D'E'F'$ keskipiste. Piirretään ympyrä H' keskipisteensä ja jonkin kehäpisteensä avulla. *Oikotie*: Jos ympyrän H keskipiste T tunnetaan, niin ympyrä H' on helpointa piirtää seuraavasti. Piirretään suora OT, joka leikkaa ympyrän H sen erään halkaisijan päätepisteissä. Kuvataan päätepisteet inversiolla, jolloin saadaan ympyrän H' halkaisijan päätepisteet. Puolitetaan saatu jana, jolloin löytyy jo ympyrän H' keskipiste.

`Janan kuvaaminen:` Olkoon jana XY osa suoraa k, joten jana kuvautuu aina kyseisen suoran mukana. Janan inversiokuva piirretään kuvaamalla janan päätepisteet inversiolla ympyrän C suhteen, minkä lisäksi on tarkasteltava, minne mielivaltainen janan piste Z (päätepisteiden väliltä) kuvautuu. Tällä tavoin voidaan varmistua siitä, millainen inversiokuvio piirretään. 1) Jos suora k kuvautuu *suoraksi* $k' = k$ (kun k kulkee inversiokeskuksen kautta), niin janan kuva piirretään *viivaimella*. Tapaus jakautuu lisäksi kahdeksi eri tilanteeksi. Jos jana *ei sivua* inversiokeskusta ($O \notin XY$), niin janan inversiokuva on jana $X'Y'$, jolloin jana yksinkertaisesti siirtyy suoralla (myös janan pituus voi muuttua). Jos jana *sivuaa* inversiokeskusta ($O \in XY$), syntyykin janan inversiokuvaksi kaksi puolisuoraa, joiden alkupisteet ovat X' ja Y', ja jotka jatkuvat inversiokeskuksesta poispäin äärettömyyteen. Puolisuorat syntyvät sen tähden, että inversiokeskus sijaitsee janalla XY, ja koska O:n epävirallinen kuvapiste on *piste äärettömyydessä*. Suoran voidaan nimittäin ajatella olevan ääretönsäteinen ympyrä, jonka yhtenäinen kaari puolisuorat yhteensä ovat. 2) Jos suora k kuvautuu *ympyräksi* K' (kun k ei kulje inversiokeskuksen kautta), piirretään janan kuva *harpilla*. Piirretään tällöin mainitut kolme inversiopistettä, jotka määräävät ympyrän $K' = X'Z'Y'$. Konstruoidaan inversiopisteiden määräämän ympyrän keskipiste, ja piirretään kaari $X'Z'Y'$ siten, että kaaren päätepisteet yhdistetään siltä puolelta ympyrän kehää, missä piste Z' sijaitsee.

`Ympyräkaaren kuvaaminen:` Olkoon kaari PRQ osa ympyrää H, joten kaari kuvautuu aina kyseisen ympyrän mukana. Kaaren inversiokuva piirretään kuvaamalla kaaren päätepisteet sekä yksi mielivaltainen kaaren piste R (päätepisteiden väliltä) inversiolla ympyrän C suhteen. Inversiopisteet yhdistetään joko viivaimella tai harpilla. 1) Jos ympyrä H kuvautuu *suoraksi* h' (kun H kulkee inversiokeskuksen kautta), niin kaaren inversiokuva piirretään *viivaimella*. Tapaus jakautuu kahdeksi eri tilanteeksi (vastaavasti kuin janaa kuvattaessa). Jos kaari *ei sivua* inversiokeskusta ($O \notin PRQ$), niin inversiokuva on jana $P'Q'$ ($R' \in P'Q'$). Jos kaari *sivuaa* inversiokeskusta ($O \in PRQ$), niin kaaren inversiokuvaksi syntyy kaksi puolisuoraa, joiden alkupisteet ovat P' ja Q', ja jotka jatkuvat inversiokeskuksesta poispäin äärettömyyteen. 2) Jos ympyrä H kuvautuu *ympyräksi* H' (kun H ei kulje inversiokeskuksen kautta), piirretään inversiokuva *harpilla*. Piirretään mainitut kolme inversiopistettä, jotka määräävät ympyrän $H' = P'Q'R'$. Konstruoidaan inversiopisteiden määräämän ympyrän keskipiste, ja piirretään kaari $P'R'Q'$ siten, että päätepisteet yhdistetään siltä puolelta ympyrän kehää, missä piste R' sijaitsee.

Tarkistukseksi voi aina kuvata ylimääräisen mielivaltaisen kuvattavan kuvion pisteen, jotta näkee ylimääräisen inversiopisteen osuvan piirretylle inversiokuvalle.

3 Ratkaisukonstruktiot harpilla ja viivaimella

Apollonioksen ongelman annetut kolme kuviota voivat olla pisteitä (P), suoria (S) tai ympyröitä (Y), joten mahdollisia kolmen kuvion kombinaatioita on kymmenen erilaista: PPP, SSS, PPS, PSS, PPY, PSY, SSY, PYY, SYY ja YYY. Kuviokolmikot on tässä lueteltu ratkaisukonstruktion piirtämisen kannalta suunnilleen helpoimmasta vaikeimpaan, missä järjestyksessä tapaukset tässä luvussa myös esitetään. Esimerkiksi kaksi helpointa tapausta ovat kolmen pisteen (PPP) ja kolmen suoran (SSS) tapaukset. Ratkaistuja helppoja tapauksia voidaan hyödyntää apuvälineinä myöhemmissä vaikeammissa tapauksissa, jolloin vaikkapa kolmen pisteen tangenttiympyrän konstruointimenetelmään viitataan menetelmänä PPP. Tällä tavoin menetelmävarasto karttuu ratkaisu ratkaisulta. Viimeisenä ratkaisukonstruktiona esitellään tapauksista ehdottomasti merkittävin, kolmen annetun ympyrän tapaus (YYY).

Annetusta kuviokolmikosta voidaan joissakin tapauksissa muodostaa helpommin ratkeava kuvioasetelma *muuttamalla* (pienentämällä tai kasvattamalla tietyn janan h verran) *annettujen ympyröiden säteitä* ja vastaavasti *siirtämällä annettuja suoria* yhdensuuntaissiirroilla (saman janan h verran). Tämä erityinen jana h voi olla esimerkiksi annetuista ympyröistä pienimmän säde, jotta se kutistuisi pisteeksi (keskipisteekseen). Pisteille on nimittäin helpointa löytää tangenttiympyrät. Tangenttiympyrän löydyttyä (helpommin ratkeavalle apukuviokolmikolle) sen sädettä muutetaan janan h verran, jotta saadaan alkuperäistä kuviokolmikkoa sivuava ratkaisuympyrä. Tällä tavoin löydetään kaikki mahdolliset ratkaisuympyrät, kunhan muodostetaan sopivanlaisia apukolmikoita. [Bu, s. 165]

Ratkaisun apuvälineenä käytetään tarvittaessa lisäksi *inversiokuvausta ympyrän suhteen*, sillä se on erittäin käyttökelpoinen työkalu geometrisissa ongelmissa, joissa esiintyy ympyröitä ja suoria sekä niiden tangentteja. Inversiokuvauksella on tarkoitus kuvata annetut kuviot toisenlaisiksi ympyröiksi ja suoriksi, joiden tangenttiympyrät on helpompi konstruoida. Tangenttiympyröiden löydyttyä ne kuvataan inversiolla alkuperäistä kuviokolmikkoa sivuaviksi ratkaisuympyröiksi. [Bu, s. 165]

Ratkaisuympyrän piirtämiseksi *harpilla* täytyy tuntea kyseisen ympyrän *keskipiste* sekä jokin *kehäpiste* tai *säde* (eli janan päätepisteet). Ne ovatkin ratkaisuissa tavoiteltavat pisteet kaikessa yksinkertaisuudessaan.

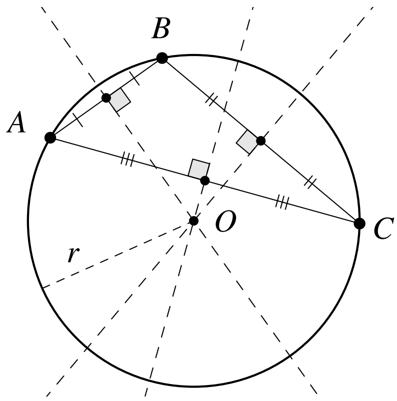
Seuraavaksi esitettävien ratkaisujen karkea ideatasoinen malli on saatu lähteestä [Us, s. 10–18], ellei toisin mainita. Kyseisessä pro gradu -tutkielmassa käytetty alkuperäinen verkkosivulähde ei ole enää saatavilla, joten ratkaisujen piirtämisen tarkemmat yksityiskohdat on siksi päätelty omatoimisesti enimmäkseen itse, mutta osaksi myös jonkin muun lähteen (kuten tämän tutkielman ohjaajan Kerkko Luoston) avustuksella. Lähteen [Us, s. 10–18] toissijaisuuden vuoksi on valitettavasti epäselvää, kenen tai keiden matemaatikoiden keksimiä esitettävät ratkaisumenetelmät alunperin ovat. PSY-kolmikon yleiseen ratkaisumenetelmään liittyvän tietopuutoksen takia on lisäksi keksitty itse joitakin vaihtoehtoisia ratkaisumalleja (lähteiden ulkopuolelta), kirjoittamisen aikana karttuneen menetelmävaraston avulla. Itse päätellyt vaihtoehtoiset ratkaisumallit saattavat toki todennäköisesti olla (tai olla olematta) yleisesti tunnettuja.

Tutkielmassa esitettävät Apollonioksen ongelman ratkaisujen konstruktiomenetelmät ovat siis eräät lukuisten mahdollisten menetelmien joukosta. Lienee siis mahdollista, että olisi olemassa ketterämpiä ja helpompiakin ratkaisumenetelmiä, kuin tutkielmassa esitettävät tavat, mutta niinhän kai aina on. Geometria on vieläpä jatkuvasti kehittyvä matematiikan osa-alue, joten ehkäpä kaikista paras menetelmä on yhä jopa keksimättä. Seuraavaksi esitettävät menetelmät ovat kuitenkin joka tapauksessa vähintäänkin toimivia.

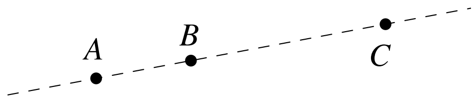
Nimetään annetut suorat pienillä kirjaimilla $\{a, b, c\}$ ja annetut pisteet sekä ympyrät samoilla mutta suurilla kirjaimilla $\{A, B, C\}$. Piirretään ratkaisukonstruktioissa annetut kuviot sekä ratkaisuympyrät paksummin kuin muut kuviot: annetut suorat ja ympyrät paksulla yhtenäisellä viivalla, annetut pisteet hivenen suurempina kuin muut pisteet, ratkaisuympyrät paksulla (yhtenäisellä tai katkonaisella) viivalla, ja kaikki muut apukuviot ohuella viivalla.

3.1 Piste – piste – piste (PPP)

Olkoon annettu kolmikko kolme pistettä A, B ja C. Pisteitä sivuava *yksi* ainoa ratkaisuympyrä on kolmion ABC ympärysympyrä (eli kolmion ympäri piirretty ympyrä), jonka keskipiste sijaitsee kolmion *keskinormaalien* leikkauspisteessä. Piirretään siis janat AB, BC ja CA sekä niiden keskinormaalit (ks. janan puolittaminen s. 24). Kaikki keskinormaalit leikkaavat toisensa pisteessä O, joten on ratkaisun kannalta toki riittävää piirtää vain kaksi keskinormaalia. Piste O on yhtä etäällä kaikista annetusta pisteistä $\{A, B, C\}$, koska janan keskinormaalin ominaisuus on, että keskinormaalin jokainen piste on yhtä etäällä janansa päätepisteistä [Ma, s. 29]. Täten $|OA| = |OB| = |OC| = r$. Tiedetään siis kaikki tarvittava, eli tangenttiympyrän keskipiste ja säde. Otetaan harppiin säteeksi r ja piirretään ratkaisuympyrä (O, r).



Kolmen pisteen tapauksessa on olemassa enintään *yksi* ratkaisuympyrä. Ratkaisuympyrää *ei ole olemassa* kuitenkaan lainkaan, mikäli annetut pisteet sijaitsevat samalla suoralla.



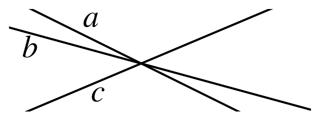
3.2 Suora – suora – suora (SSS)

Olkoot annetut kuviot kolme suoraa a, b ja c. Annetut suorat voivat olla keskenään joko *erisuuntaisia* tai *yhdensuuntaisia* tai sekä että. Tarkastellaan kyseiset kolme alatapausta kukin erikseen. Ratkaisuympyröitä on kolmen suoran tapauksessa olemassa enintään neljä.

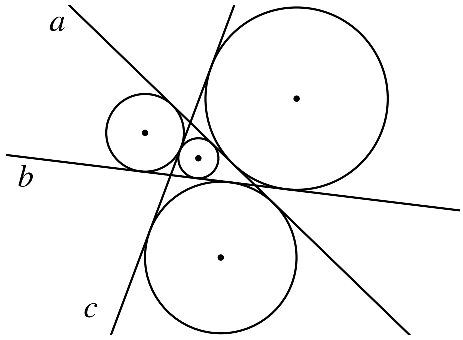
Kaikki annetut suorat ovat erisuuntaisia (SSS)

Olkoot kaikki suorat erisuuntaisia. Erisuuntaiset suorat voivat leikata toisensa joko täsmälleen yhdessä pisteessä tai kolmessa erillisessä pisteessä.

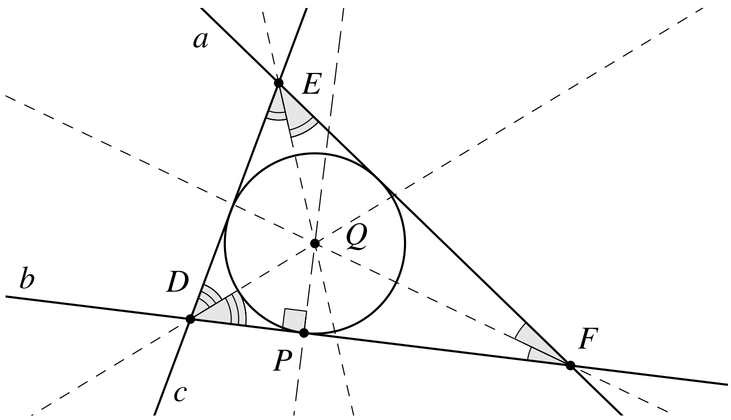
Jos erisuuntaiset suorat leikkaavat toisensa täsmälleen yhdessä pisteessä, niin ratkaisuympyrää *ei ole olemassa* lainkaan.



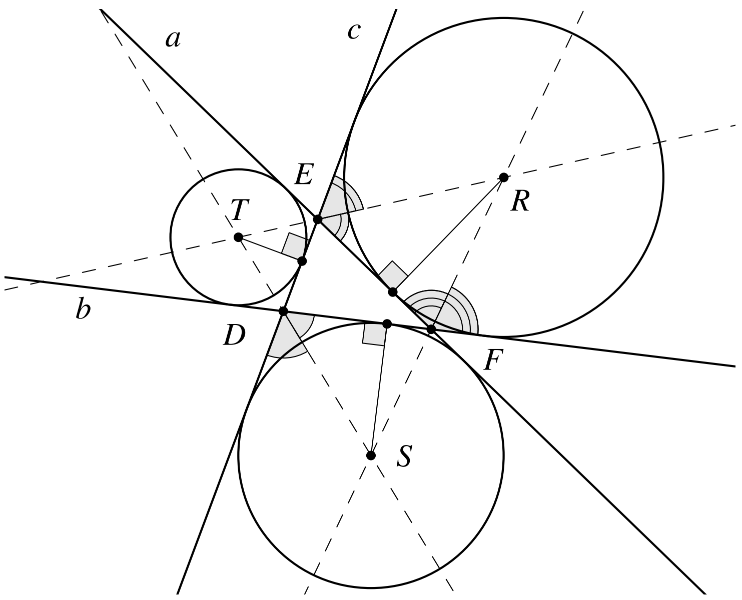
Leikatkoot erisuuntaiset suorat toisensa kolmessa eri pisteessä D, E ja F, jolloin muodostuu kolmio DEF (pisteiden nimeämisjärjestys on mielivaltainen). Suorat jakavat tason seitsemään alueeseen. Ratkaisuympyrä voi sijaita ainoastaan sellaisessa alueessa, jota reunustavat kaikki kolme annettua suoraa. Tangenttiympyröitä on tällöin olemassa *neljä*: yksi kolmion DEF sisäpuolella ja kolme ulkopuolella sivuten kutakin kolmion sivua.



Piirretään ensin kolmion DEF sisällä (eli suorien rajaamassa suljetussa alueessa) sijaitseva tangenttiympyrä. Kolmion sisään piirretyn ympyrän keskipiste on kolmion *kulmanpuolittajien* leikkauspisteessä, koska kulmanpuolittajan ominaisuus on, että se on yhtä etäällä molemmista kyljistänsä [Ma, s. 29]. Kolmion sisään piirretyn tangenttiympyrän keskipisteessä kyseinen etäisyys kolmion kyljistä on ympyrän säde. Piirretään vähintään kaksi kolmion kulmanpuolittajaa (ks. kulmanpuolittajan konstruointi s. 25), leikkauspisteen löytämiseksi on riittävää piirtää kaksi kulmanpuolittajaa. Olkoon kulmanpuolittajien leikkauspiste Q. Piirretään pisteen Q kautta kulkeva *normaali* (ks. normaalin konstruointi s. 25) jollekin kolmion sivulle pisteeseen P, jolloin saadaan tangenttiympyrän säteen pituus $|QP|$. Piirretään ympyrä $(Q, |QP|)$, joka on yksi ratkaisuista.

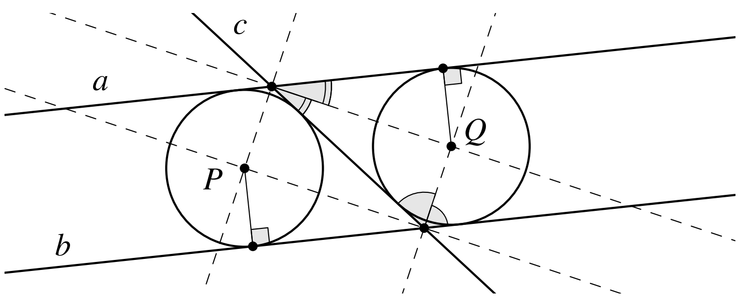


Muut ratkaisuympyrät sijaitsevat kolmion DEF ulkopuolella kukin sivuten yhtä kolmion sivua. Piirretään suorien a, b ja c leikkauspisteiden (eli kolmion kärkien) kautta kulkevat *kulmanpuolittajat*, jotka sijaitsevat kolmion ulkopuolella. Kolmion ulkoisten tangenttiympyröiden keskipisteet löytyvät kulmanpuolittajien leikkauspisteistä R, S ja T. Annettuja suoria sivuavien tangenttiympyröiden säteet saadaan vastaavasti (kuin edellä sisäisesti sivuavan ympyrän tapauksessa) piirtämällä *normaalijanat* kulmanpuolittajien leikkauspisteistä R, S ja T kolmion DEF lähimmille sivuille. Piirretään tangenttiympyrät ja kutsutaan niitä keskipisteidensä mukaan ympyröiksi R, S ja T.



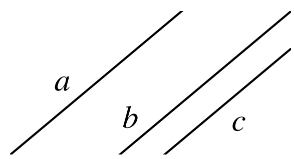
Kaksi annetuista suorista ovat yhdensuuntaisia (SSS)

Olkoot annetuista suorista kaksi keskenään yhdensuuntaiset (oletetaan $a \parallel b$). Kolmas erisuuntainen suora c leikkaa yhdensuuntaiset suorat ($c \nparallel a$ ja $c \nparallel b$). Suorat jakavat tason tällöin kuuteen alueeseen. Suorille yhteisiä tangenttiympyröitä on tällöin olemassa ainoastaan yhdensuuntaisten suorien välissä sijaitsevissa kahdessa alueessa, erisuuntaisen suoran molemmin puolin. Ratkaisuympyröitä on täten olemassa *kaksi*, kuvassa esitetyt ympyrät P ja Q. Ratkaisuympyrät konstruoidaan lähes vastaavasti kuin edellä, kulmanpuolittajien avulla.



Kaikki annetut suorat ovat yhdensuuntaisia (SSS)

Olkoot annetut suorat keskenään yhdensuuntaisia ($a \parallel b \parallel c$), jolloin suorat jakavat tason kolmeen alueeseen. Ratkaisuympyrää *ei ole olemassa* lainkaan, koska kussakin alueessa on reunana annettuja suoria enintään kaksi, mikä ei riitä.

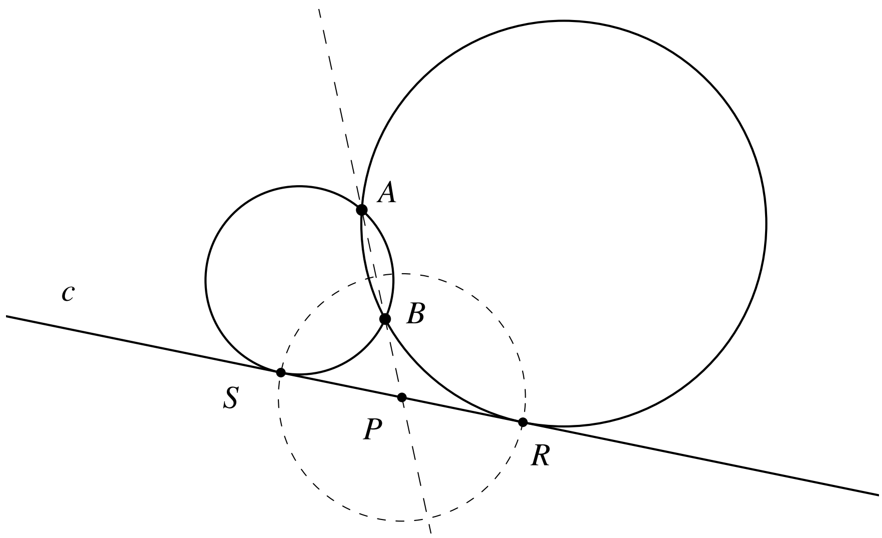


3.3 Piste – piste – suora (PPS)

Olkoon annettu kolmikko kaksi pistettä A ja B sekä suora c. Pisteet voivat sijaita joko erillään suorasta tai suoralla. Pisteiden ei sallita sijaitsevan päällekkäin, koska tällöin annettuja kuvioita olisi vain kaksi.

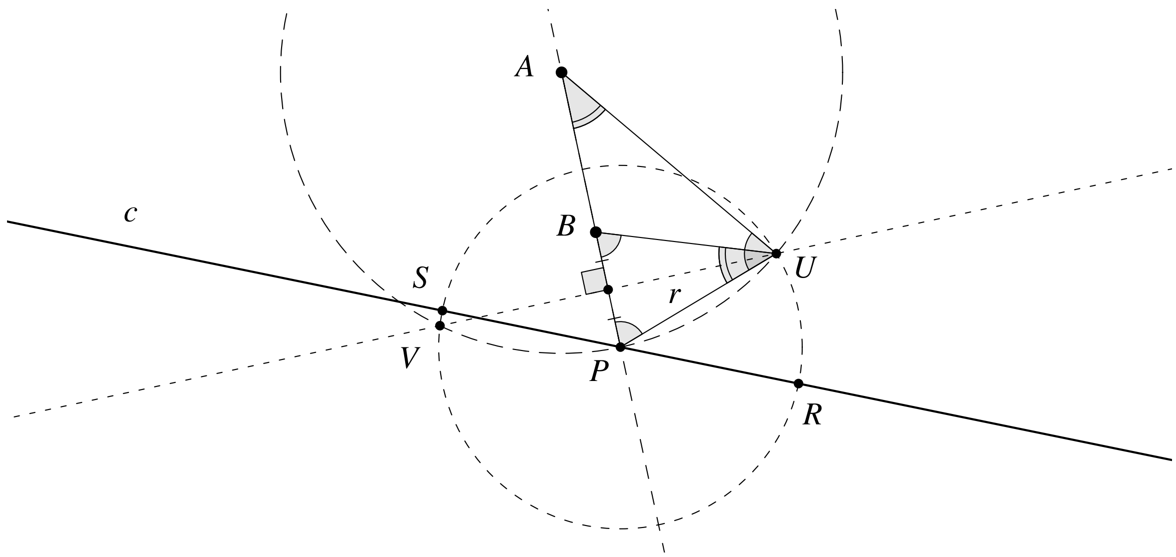
Pisteet sijaitsevat samalla puolella suoraa (PPS)

Tarkastellaan ensimmäiseksi tilannetta, jossa annetut kaksi pistettä sijaitsevat erillään suorasta ja samalla puolella suoraa c siten, että annettujen pisteiden kautta piirretty suora leikkaa suoran c ($AB \nparallel c$). Piirretään suora AB. Olkoon suorien c ja AB leikkauspiste P. Ratkaisuympyröitä on tällöin olemassa *kaksi*, ja ne leikkaavat toisensa annetuissa pisteissä A ja B, joten ratkaisuympyröiden sivuamispisteet suoralla c sijaitsevat pisteen P eri puolilla. Ratkaisuympyröiden sivuamispisteet suoralta c löytyvät erään seuraavaksi etsittävän P-keskisen inversioympyrän leikkauspisteistä.



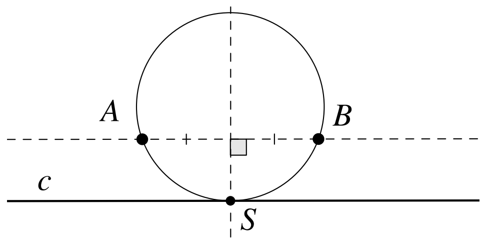
Halutunlainen P-keskinen inversioympyrä kuvaa annetun kolmikon takaisin alkuperäisille paikoilleen, joten selvitetään inversioympyrältä P vaadittavat ominaisuudet. Piste $P \in c$ on siis inversiokeskus. Suora c kuvautuu tällöin takaisin itselleen, sillä inversion määritelmän (määritelmä 2.13) mukaan inversiokeskuksen kautta kulkeva suora kuvautuu takaisin samaksi suoraksi. Pisteet A ja B sijaitsevat samalla inversiokeskuksesta P lähtevällä puolisuoralla PA (joka on osa suoraa AB), joten pisteiden A ja B on puolestaan kuvauduttava toisikseen. Oletetaan jatkossa, että piste B on pisteiden A ja P välissä. Etsitään siis sellainen P-keskinen inversioympyrä (*säde* vielä tuntematon), joka kuvaa pisteen A pisteeksi B (eli $A' = B$), jolloin involutiivisesti myös piste B kuvautuu pisteeksi A (eli $B' = A$). Pisteen B on tällöin sijaittava ympyrän P sisällä ja pisteen A ympyrän P ulkopuolella, jolloin inversioympyrän kehä kulkee jossakin pisteiden A ja B välissä.

Konstruoidaan pisteiden A ja B sekä inversiokeskuksen P avulla yksi inversioympyrän kehäpiste, jotta saadaan selville inversioympyrän säde. Oletetaan konstruktiossa, että kuvataan inversioympyrän ulkopuolella oleva piste A pisteeksi B, joten avuksi ovat inversiopisteen konstruoimisen ohjeet sivulta 29 alkaen (sovelletusti). Otetaan harppiin säteeksi $|AP|$ ja piirretään A-keskinen ympyrä. Tavoitteena on piirtää kaksi yhdenmuotoista tasakylkistä kolmiota, kuten kuvassa sivulla 29 (ympyrän ulkopuolisen pisteen inversiopisteen konstruointi). Piirretään janan PB keskinormaali, joka leikkaa edellä piirretyn A-keskisen ympyrän pisteissä U ja V. Saadaan keskenään yhtenevät tasakylkiset pienet kolmiot PBU ja PBV (joiden yhteinen kanta on PB), sekä keskenään yhtenevät suuret tasakylkiset kolmiot PUA ja PVA (joiden yhteinen kylki on PA). Pienet ja suuret kolmiot ovat keskenään yhdenmuotoisia (esim. $\triangle PBU \sim \triangle PUA$), koska niillä on yhtä suuret kantakulmat. Pisteet U ja V ovat täten etsityn inversioympyrän P kehäpisteitä, joten kyseisen ympyrän säde on $|PU| = |PV| = r$. Otetaan harppiin säde r ja piirretään etsitty P-keskinen inversioympyrä (P, r).



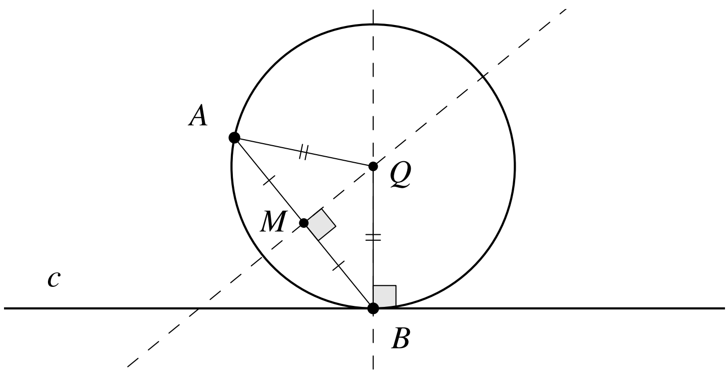
Inversioympyrä (P, r) leikkaa suoran c pisteissä R ja S, jotka ovat etsityt sivuamispisteet (ratkaisuympyröiden ja suoran c kesken). Inversion määritelmän mukaan tiedetään, että inversioympyrän kehällä olevat pisteet pysyvät kuvauksessa aina paikallaan. Siksi myös ratkaisuympyröiden inversioympyrän kehällä olevat sivuamispisteet pysyvät paikallaan, jolloin voidaan vakuuttua siitä, että myös ratkaisuympyrät pysyvät inversiokuvauksessa ympyrän (P, r) suhteen paikoillaan. Tämä on sopusoinnussa inversion kuvautumiseen liittyvän lauseen 2.14 kanssa, jonka mukaan inversiokeskuksen kautta kulkematon ympyrä kuvautuu inversiokeskuksen kautta kulkemattomaksi ympyräksi. Piirretään PPP-menetelmällä ratkaisuympyrät ABR ja ABS, jotka on esitetty jo aiemmassa kuvassa.

Mikäli annetut pisteet sijaitsevat suoran c kanssa *yhdensuuntaisella* suoralla, eli $AB \parallel c$, on ratkaisuympyröitä olemassa vain *yksi*. Piirretään janan AB keskinormaali. Keskinormaali leikkaa suoran c pisteessä S. Ratkaisuympyrä ABS löytyy PPP-menetelmällä.



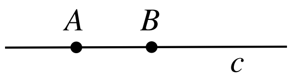
Pisteistä toinen sijaitsee suoralla (PPS)

Sijaitkoon toinen annetuista pisteistä annetulla suoralla c (oletetaan $B \in c$). Ratkaisujen lukumäärä on tällöin *yksi*. Piirretään jana AB ja sen keskinormaali (olkoon janan keskipiste M). Piirretään pisteen B kautta kulkeva suoran c normaali. Keskinormaali ja normaali leikkaavat pisteessä Q. Muodostuneet kolmiot AMQ ja BMQ ovat yhtenevät, koska niillä on yhteinen sivu MQ, yhtä suuri kulma $\angle QMA = \angle BMQ = 90^\circ$ sekä yhtä pitkä sivu $|AM| = |BM|$. Siis yhtenevien kolmioiden vastinsivut ovat yhtä pitkät $|AQ| = |BQ|$, joten piste Q on tangenttiympyrän keskipiste. Kolmikon $\{A, B, c\}$ ratkaisuympyrä on $(Q, |AQ|)$.



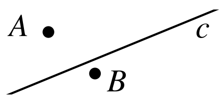
Pisteet sijaitsevat suoralla (PPS)

Jos molemmat annetut pisteet sijaitsevat annetulla suoralla ($A, B \in c$), *ei ole olemassa* ratkaisua.



Pisteet sijaitsevat eri puolilla suoraa (PPS)

Jos annetut pisteet sijaitsevat eri puolilla annettua suoraa, niin ratkaisua *ei ole olemassa*.



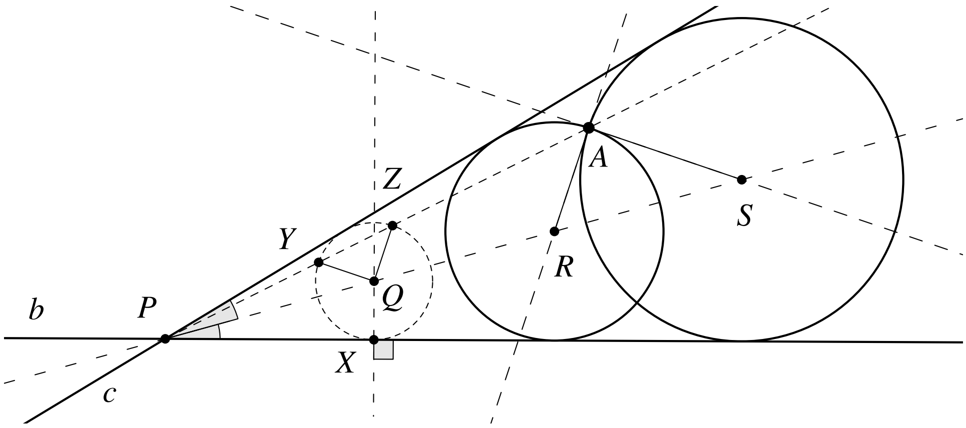
3.4 Piste – suora – suora (PSS)

Olkoon annettu kolmikko piste A sekä suorat b ja c. Suorat voivat joko *leikata* toisensa tai olla *yhdensuuntaiset*. Piste voi sijaita erillään suorista, yhdellä suoralla tai suorien leikkauspisteessä.

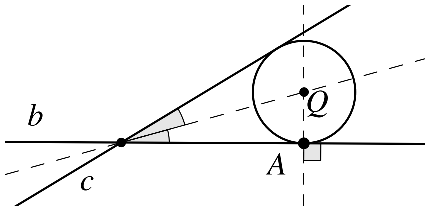
Annetut suorat leikkaavat toisensa (PSS)

Leikatkoot annetut suorat toisensa ($b \nparallel c$). Tarkastellaan ensin tilannetta, jossa piste ei kuulu kummallekaan suoralle ($A \notin b \cup c$). Olkoon suorien leikkauspiste P. Suorat jakavat tason neljään sektoriin. Piirretään kulmanpuolittaja siihen sektoriin, jossa piste A sijaitsee, sillä ratkaisuympyröiden keskipisteet sijaitsevat kyseisellä kulmanpuolittajalla. Ratkaisuympyröitä on olemassa *kaksi*, ja ne leikkaavat toisensa pisteessä A.

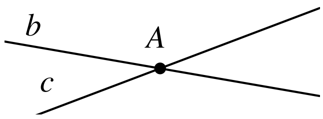
Selvitetään ratkaisuympyröiden keskipisteiden tarkat sijainnit kulmanpuolittajalla. Piirretään avuksi kulmanpuolittajalle mielivaltainen piste Q ja Q-keskinen apuympyrä, joka sivuaa suoria b ja c: Piirretään suoralle b pisteen Q kautta kulkeva normaali. Olkoon normaalin ja suoran b leikkauspiste X. Piirretään apuympyrä (Q, $|QX|$). Apuympyrä on vastinpisteiltään yhdenmuotoinen ratkaisuympyröiden kanssa. Piirretään puolisuora PA, joka leikkaa apuympyrän pisteissä Y ja Z. Piirretään janojen QY ja QZ kanssa yhdensuuntaiset suorat (ks. ohje s. 26), jotka kulkevat pisteen A kautta ja leikkaavat kulmanpuolittajan pisteissä R ja S. Ratkaisuympyrät ovat (R, $|RA|$) ja (S, $|SA|$).



Tarkastellaan sitten tilannetta, jossa suorat leikkaavat toisensa, ja annettu piste A sijaitsee jommallakummalla *suoralla* (oletetaan $A \in b$). Tällöin ratkaisuympyröitä on olemassa vain *yksi*. Piirretään suoran b pisteen A kautta kulkeva normaali. Ratkaisuympyrän keskipiste Q sijaitsee kulmanpuolittajan ja normaalin leikkauspisteessä, joten ratkaisuympyrä $Q = (Q, |QA|)$ konstruoidaan lähes vastaavasti kuin apuympyrä edellä.



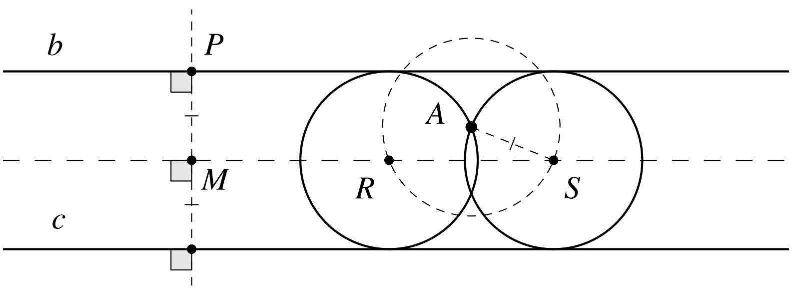
Kolmikolle $\{A, b, c\}$ *ei ole olemassa* ratkaisua, jos annettu piste sijaitsee suorien leikkauspisteessä ($A \in b \cap c$).



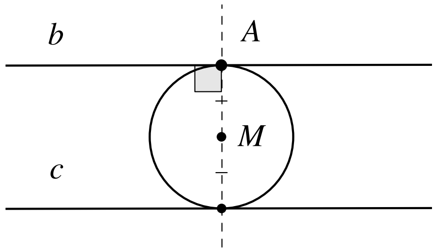
Annetut suorat ovat yhdensuuntaiset (PSS)

Olkoot annetut suorat yhdensuuntaiset ($b \parallel c$). Piste A voi sijaita tällöin suorien välissä, yhdellä suoralla tai suorien välisen alueen ulkopuolella.

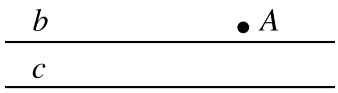
Tarkastellaan ensiksi tilannetta, jossa annettu piste A sijaitsee suorien *välissä*. Tällöin ratkaisuympyröitä on kaksi, ja niiden keskipisteet sijaitsevat yhdensuuntaisten suorien puolivälissä. Aloitetaan konstruoimalla tällainen yhdensuuntaisten suorien puolivälissä kulkeva yhdensuuntainen suora. Piirretään suoralla b sijaitsevaan mielivaltaiseen pisteeseen P normaali, joka leikkaa annetut suorat kohtisuorasti. Piirretään leikkauspisteiden väliselle janalle keskinormaali, joka on yhdensuuntainen annettujen suorien kanssa ja kulkee täsmälleen niiden puolivälissä. Normaali ja keskinormaali leikkaavat toisensa pisteessä M. Otetaan harppiin säteeksi pituus $|PM|$, ja piirretään A-keskinen ympyrä, joka leikkaa keskinormaalin pisteissä R ja S. Ratkaisuympyrät ovat $(R, |RA|)$ ja $(S, |SA|)$.



Jos annetut suorat ovat yhdensuuntaiset, ja annettu piste A sijaitsee jommallakummalla *suoralla* (oletetaan $A \in b$), niin on olemassa vain *yksi* ratkaisu. Ratkaisuympyrän keskipiste M konstruoidaan vastaavasti kuin edellä, mutta laittamalla pisteen P rooliin annettu piste A.



Ratkaisua *ei ole olemassa*, mikäli annetut suorat ovat yhdensuuntaiset, ja piste A sijaitsee *suorien välisen alueen ulkopuolella*.



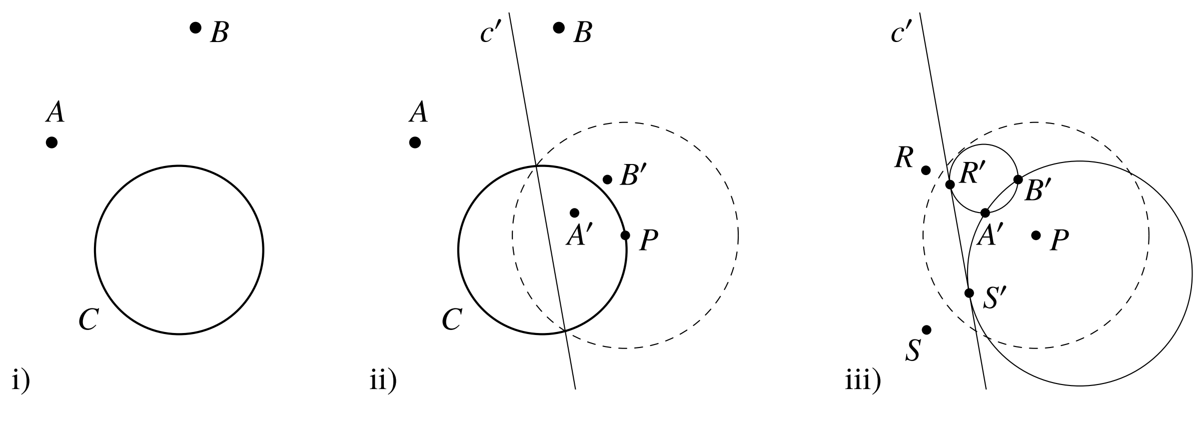
3.5 Piste – piste – ympyrä (PPY)

Olkoon annettu kolmikko pisteet A ja B sekä ympyrä C. Pisteet voivat sijaita ympyrän *ulkopuolella*, ympyrän *sisällä* tai ympyrän *kehällä*. Käsitellään kukin alatapaus erikseen. Ratkaisuja tällä kolmikolla on olemassa enintään *kaksi*.

Annettujen kuvioiden joukossa esiintyy PPY-tapauksesta alkaen vähintään yksi ympyrä, joten piirretään jatkossa ratkaisuympyrät katkoviivalla erotuksena annetuista ympyröistä (koska niillä on sama viivanpaksuus). Inversioympyrät piirretään tosin myös katkoviivalla, mutta ohuemmalla katkoviivalla kuin ratkaisuympyrät.

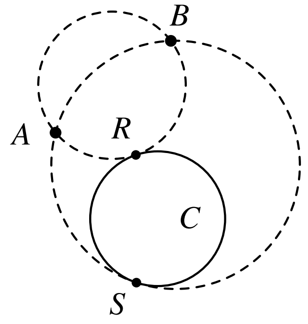
Pisteet sijaitsevat ympyrän ulkopuolella (PPY)

Sijaitkoot molemmat annetut pisteet annetun ympyrän ulkopuolella (ks. kuva i). Muutetaan annettu PPY-kolmikko helpommin ratkeavaksi PPS-apukolmikoksi kuvaamalla ympyrä inversiolla suoraksi. Tarkoituksena on löytää ympyrän C pisteet, joita ratkaisuympyrät sivuavat. Piirretään siis ympyrälle C mielivaltainen piste P. Piirretään P-keskinen inversioympyrä (säde mielivaltainen, kunhan positiivinen). Ympyrä C kulkee inversiokeskuksen P kautta, joten C kuvautuu



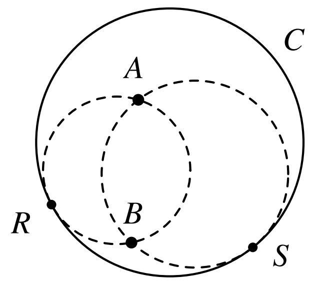
suoraksi c', joka ei kulje inversiokeskuksen kautta. Kuvataan myös pisteet A ja B inversioympyrän P suhteen pisteiksi A' ja B' (ks. kuva ii).

On saatu muodostettua siis apukolmikko eli pisteet A' ja B' sekä suora c', joten niitä sivuavat tangenttiympyrät $A'B'R'$ ja $A'B'S'$ löytyvät PPS-menetelmällä (ks. kuva iii ja tarvittaessa PPS-menetelmä alaluvusta 3.3). Tangenttiympyröitä ei kuitenkaan tarvitse välttämättä piirtää näkyviin, sillä riittävä tieto niistä on löytää tangenttiympyröiden suoraa c' sivuavat pisteet R' ja S'. Pisteiden R' ja S' inversiokuvat ovat nimittäin etsityt pisteet. Kuvataan siis inversiolla (ympyrän P suhteen) löydetyt pisteet R' ja S' pisteiksi R ja S. Etsityt alkuperäisen ongelman ratkaisuympyrät ovat täten ympyrät ABR ja ABS (kuvassa katkoviivalla), jotka voidaan piirtää kolmen tunnetun pisteen avulla PPP-menetelmällä.



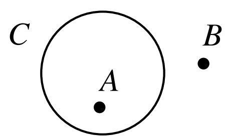
Pisteet sijaitsevat ympyrän sisällä (PPY)

Sijaitkoot annetun kolmikon $\{A, B, C\}$ pisteet A ja B ympyrän C sisäpuolella. Konstruoidaan ratkaisu täsmälleen vastaavasti kuin edellä. Ratkaisuympyröitä on tällöin *kaksi*, ympyrät ABR ja ABS.



Pisteet sijaitsevat ympyrän kehän eri puolilla (PPY)

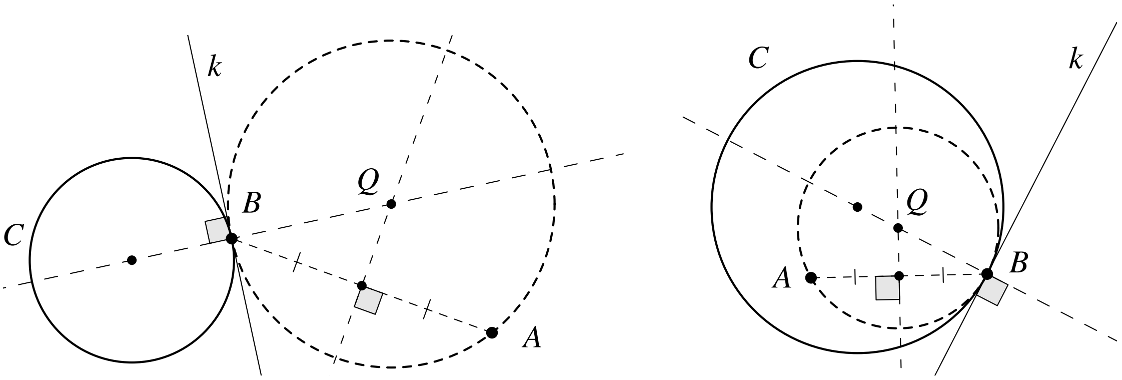
Jos annetut pisteet sijaitsevat siten, että pisteistä toinen on ympyrän sisäpuolella ja toinen ulkopuolella, niin tapauksella *ei ole olemassa* ratkaisua.



Pisteistä toinen sijaitsee ympyrän kehällä (PPY)

Annetuista pisteistä toinen (oletetaan B) sijaitsee annetun ympyrän C kehällä ($B \in C$) ja toinen muualla ($A \notin C$) eli annetun ympyrän sisä- tai ulkopuolella. Tällöin on olemassa vain *yksi* ratkaisuympyrä. Ratkaisuympyrä sivuaa ympyrää C pisteessä B, joten B sijaitsee ympyrän C sekä ratkaisuympyrän keskipisteiden kautta kulkevalla suoralla. Piirretään keskipisteiden kautta kulkeva suora (ympyrän C keskipisteen ja pisteen B avulla). Piirretään janan AB keskinormaali.

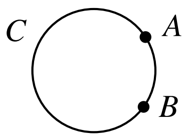
Keskinormaali ja edellä piirretty suora leikkaavat toisensa ratkaisuympyrän keskipisteessä Q, joten ratkaisuympyrä on $Q = (Q, |QB|)$.



Kuviin on piirretty ylimääräinen tangenttisuora k, jonka asennon ja paikan määräävät piste B ja ympyrä C: Tilanne on käytännössä täsmälleen vastaava kuin annettujen kahden pisteen ja suoran tapaus (PPS), jossa toinen pisteistä sijaitsee suoralla. Annettu kolmikko koostuisi tässä tapauksessa pisteistä A ja B sekä ympyrän C (pisteen B kautta kulkevasta) tangentista k.

Pisteet sijaitsevat ympyrän kehällä (PPY)

Jos molemmat annetut pisteet sijaitsevat annetun ympyrän kehällä ($A, B \in C$), *ei ole olemassa* ratkaisua. Jos tangenttiympyrä nimittäin sivuaisi annettuja pisteitä, niin se ei voisi silloin sivuta annettua ympyrää, koska ympyröiden välisen sivuamisen määritelmän mukaan ympyrät sivuavat toisiaan vain, kun niillä on täsmälleen yksi yhteinen piste.



3.6 Piste – suora – ympyrä (PSY)

Olkoot annetut kuviot piste A, suora b ja ympyrä C. *Suora voi* leikata ympyrän, sivuta ympyrää tai olla erillään ympyrästä. *Piste voi sijaita* ympyrän sisällä, ympyrän ulkopuolella, ympyrän kehällä, suoralla, suoran ulkopuolella, suoran ja ympyrän sivuamispisteessä tai suoran ja ympyrän leikkauspisteessä. Ratkaisuja on olemassa yleensä *enintään neljä*, äärellisissä tapauksissa, mutta jossakin tapauksessa jopa *ääretön* määrä.

Lajitellaan erilaiset tapaukset (a–k) taulukkoon 3.1 sen mukaan, mitkä annetut kuviot koskettavat toisiaan. Esimerkiksi, jos suoralla b ja ympyrällä C on *yhteinen piste*, merkitään rasti ($\times$) kohtaan bC. Kohtia bC on kaksi kappaletta, koska suoralla ja ympyrällä voi olla enintään kaksi yhteistä pistettä. Muut kuvioiden yhteisten pisteiden vaihtoehdot ovat Ab ja AC, jotka kertovat, sijaitseeko piste A suoralla b tai ympyrällä C. Esimerkiksi tapauksissa b, e, ja i piste A kuuluu suoralle b ($A \in b$) mutta ei ympyrälle C ($A \notin C$). Taulukko ei kerro annettujen kuvioiden sijaintia toisiinsa nähden kuitenkaan aivan tyhjentävästi, sillä taulukossa jätetään erittelemättä erillään muista annetuista kuvioista sijaitsevan pisteen A sijoittuminen ympyrän *sisä-* tai *ulkopuolelle* sekä suoran *eri puolille*. Lisätarkastelu täytyykin tehdä tapauksissa, joissa piste A *ei* sijaitse ympyrällä C (taulukon tapaukset, joissa *ei* rastia kohdassa AC) sekä tapauksissa, joissa piste *ei* kuulu suoralle b (taulukon tapaukset, joissa *ei* rastia kohdassa Ab). Esimerkiksi tapauksessa a on ratkaisuja olemassa joko neljä tai nolla riippuen pisteen A sijainnista.

Taulukko 3.1: PSY. Ratkaisuympyröiden lukumäärä eri tapauksissa.

Tapaus	bC	bC	Ab	AC	Kuvioiden yhteiset pisteet	Ratkaisuja
a					täysin erilliset kuviot	0 tai 4
b			×		piste on suoralla ($A \in b$)	2
c				×	piste on ympyrällä ($A \in C$)	2
d	×				suora ja ympyrä sivuavat toisiaan	1 tai 3
e	×		×		suora ja ympyrä sivuavat, ja $A \in b$	1
f	×			×	suora ja ympyrä sivuavat, ja $A \in C$	1
g	×		×	×	suora ja ympyrä sivuavat pisteessä A	∞
h	×	×			suora ja ympyrä leikkaavat toisensa	2
i	×	×	×		suora ja ympyrä leikkaavat, ja $A \in b$	2
j	×	×		×	suora ja ympyrä leikkaavat, ja $A \in C$	2
k	×	×	×	×	suora ja ympyrä leikkaavat pisteessä A	0

Tämän alaluvun PSY-ratkaisumenetelmän karkea idea on saatu lähteestä [Us, s. 15–16], joka valottaa hieman ainoastaan tapausten a ja h eräiden yksittäisten asetelmien ratkaisemista. Joihinkin muihin tapauksiin on tässä luvussa siksi kehitelty vaihtoehtoisia ratkaisutapoja, ennen kuin kirjoittajalle valkeni, *miten* PSY-menetelmällä löydetään yhteistangentit erikoisen vajavaisen "sivuamisen" tapauksissa (ks. yhteistangenttien konstruoiminen s. 27). Vaihtoehtoisten ratkaisujen väkertäminen oli täten opetuksena ainakin kirjoittajalle, että kannattaa yrittää löytää tarvittaessa kunnollisia lähteitä, mikäli haluaa päästä helpommalla. Vaihtoehtoiset ratkaisut ovat toisaalta hyvää aivojumppaa. Lisäksi, matematiikan hieno puoli on, että oikeaan lopputulokseen voidaan toisinaan päästä kulkemalla kovin erilaisia reittejä, jotka kukin tuovat omanlaistaan lisätietoa tutkittavasta ongelmasta.

Esitellään seuraavaksi ratkaisumenetelmä, jolla löydetään *kaikki* olemassa olevat ratkaisuympyrät *jokaiselle* erilaiselle PSY-tapaukselle. Sen jälkeen esitellään ratkaisuineen kaikki piste–suora–ympyrätapaukset taulukon mukaisessa järjestyksessä ja jaoteltuna annettujen suoran ja ympyrän välisen sijainnin mukaan (erilliset, sivuavat ja leikkaavat).

Ratkaisumenetelmä (PSY)

Olkoon annettu kolmikko piste A, suora b ja ympyrä C. Piirretään A-keskinen ympyrä mielivaltaisella säteellä. Kuvataan muut annetut kuviot inversiolla ympyrän A suhteen, jolloin annettujen suoran ja ympyrän inversiokuvat ovat suoria tai ympyröitä, eli $\{b', c'\}$, $\{b', C'\}$, $\{B', c'\}$ tai $\{B', C'\}$. Inversiokuvien muoto (suora tai ympyrä) ja sijainti riippuvat pisteen A eli inversiokeskuksen sijainnista. Piirretään inversiokuvien *yhteistangentit* (ks. s. 27). Yhteistangentteja voi olla olemassa inversiokuvioista sekä niiden keskinäisestä sijainnista ja asennosta riippuen eri lukumääriä. Yhteistangentit ovat etsittyjen ratkaisuympyröiden inversiokuvat. Kuvataan siis löydetyt yhteistangentit inversiolla ympyrän A suhteen. Inversiokeskuksen A kautta kulkematon suora (yhteistangentti) kuvautuu pistettä A sivuavaksi ympyräksi, joka sivuaa myös annettua suoraa b ja annettua ympyrää C (koska inversio säilyttää sivuavuuden).

Edellä esitetty menetelmä on karkeasti ottaen peräisin lähteessä [Us, s. 15–16], jossa siis puutteellisesti väitetään, että annettujen suoran ja ympyrän inversiokuvat ovat *ainoastaan* ympyröitä. Tämän virheellisen tiedon vuoksi oli keksittävä kokonaan itse, miten *suoran* sisältävien kuvioparien SY ja SS yhteistangentit pitäisi konstruoida, tai että onko niitä ylipäätänsä edes olemassa, koska suorahan ei voi varsinaisesti sivuta suoraa. Päänvaivaa tuottanut ongelma kuitenkin onneksi ratkesi lopulta, joten kaikki tarvittavat ratkaisukonstruktiot on saatu piirrettyä.

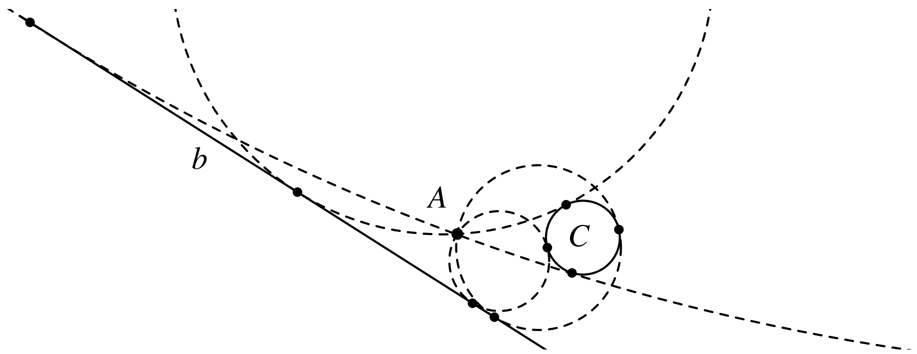
Se miksi PSY-menetelmä toimii, on ehkä helpointa ymmärtää tarkastelemalla menetelmän vaiheita päinvastaisessa järjestyksessä lopusta alkuun, millä tavoin kirjoittajakin tietopuutoksensa selvitti: Ratkaisuympyrä on siis ympyrä, joka sivuaa pistettä A (ja muita annettuja kuvioita). Asetetaan siksi piste A *inversiokeskukseksi*, jolloin inversiokeskusta sivuavat ratkaisuympyrät kuvautuvat inversiolla *suoriksi*, jotka eivät kulje inversiokeskuksen kautta. Kyseiset suorat eli *yhteistangentit* sivuavat annettujen kuvioiden (suoran b ja ympyrän C) inversiokuvia, jolloin yhteistangentit oikeasti sivuavat kuviopareja YY tai erikoisessa vajavaisessa mielessä "sivuavat" kuviopareja SY ja SS (selitetty yhteistangenttien yhteydessä sivulla 27), koska inversio säilyttää sivuavuuden. Joka tapauksessa, yhteistangenttien piirtäminen kahdelle kuviolle on yksinkertaista – mikä on tämän menetelmän taika. Yhteistangenttien vajavaiseksi "sivuamiseksi" hyväksyttävät tapaukset (esim. yhdensuuntaiset suorat) ovat inversion ominaisuuksien ansiota.

Suora ja ympyrä erillään toisistaan (PSY-tapaukset a–c)

Sijaitkoot annetut suora b ja ympyrä C *erillään* toisistaan. Pisteen A sijainti määrää, mikä tapauksista a–c on kyseessä.

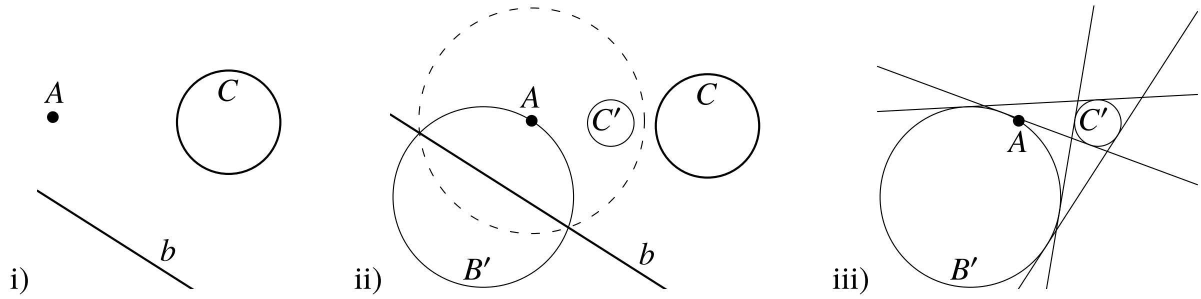
`Tapaus a:` Suora b ja ympyrä C sijaitsevat erillään toisistaan. Sijaitkoon piste A *erillään* muista annetuista kuvioista ($A \notin b \cup C$). Piste voi tällöin sijaita ympyrän C sisä- tai ulkopuolella, ja ulkopuolella sijaitessaan piste voi sijaita ympyrän kanssa joko samalla tai eri puolella suoraa b. Tapaus a jakaantuu pisteen sijainnin mukaan täten *kolmeen* oleellisesti erilaiseen asetelmaan. Kun piste A sijaitsee ympyrän C *sisäpuolella*, ei ole olemassa ratkaisua. Ratkaisua ei myöskään ole olemassa, kun piste A ja ympyrä C sijaitsevat *eri puolilla* suoraa b.

Ratkaisuja on olemassa neljä, kun piste A sijaitsee ympyrän C *ulkopuolella* ja ympyrän kanssa *samalla puolella* suoraa (ks. kuva). Näytetään, miten ratkaisuympyrät löydetään: Anne-

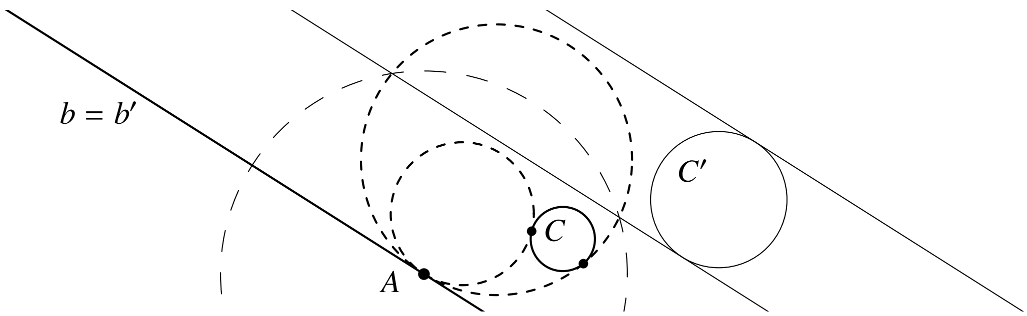


tun kolmikon $\{A, b, C\}$ asetelma on esitetty kuvassa i (sekä edellisessä kuvassa, jossa esitettynä annetun kolmikon lisäksi myös ratkaisuympyrät). Piirretään A-keskinen ympyrä mielivaltaisella säteellä. Kuvataan muut annetut kuviot inversiolla ympyrän A suhteen, jolloin (inversiokeskuksen A kautta kulkemattomasta) suorasta b tulee A:n kautta kulkeva ympyrä B' ja (A:n kautta kulkemattomasta) ympyrästä C tulee A:n kautta kulkematon ympyrä C' (ks. kuva ii). Inversiokuvat eli ympyrät B' ja C' ovat erillään toisistaan, joten niiden yhteistangentteja on olemassa yhteensä neljä (ks. kuva iii). Piirretään yhteistangentit ja kuvataan ne sitten inversiolla ympyrän A suhteen, jolloin suorista kuvautuu inversiokeskuksen A kautta kulkevia ympyröitä. Yhteistangenttien inversiokuvat sivuavat myös kuvioita b ja C (koska yhteistangentit sivuavat ympyröitä

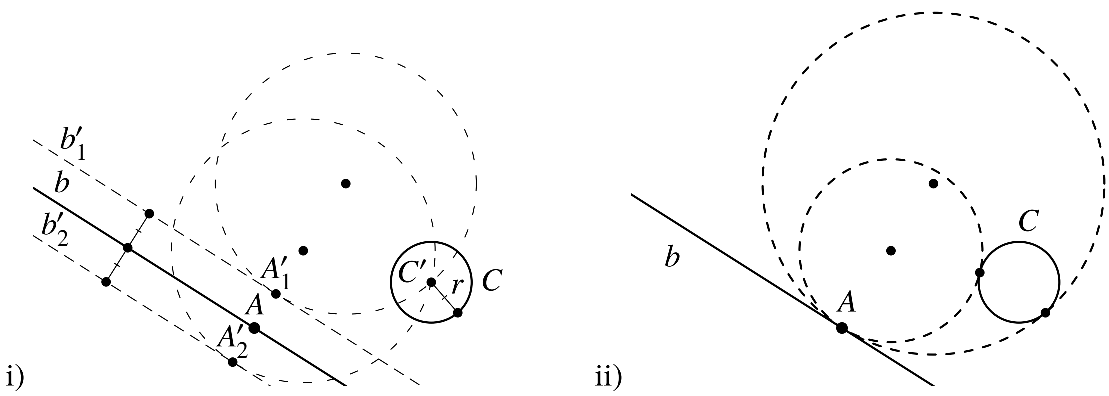
B' ja C'). Siispä löydetyt tangenttiympyrät sivuavat kaikkia annettuja kuvioita, joten ne ovat etsityt ratkaisuympyrät (kuva ratkaisuista on esitetty edellä ennen kuvaa i).



`Tapaus b:` Suora b ja ympyrä C sijaitsevat erillään toisistaan. Sijaitkoon piste A *suoralla* ($A \in b$ jolloin $A \notin C$). Esitellään kaksi erilaista ratkaisutapaa. Tapa 1: Tapaus voidaan ratkaista edellä esitetyllä PSY-menetelmällä. Inversiokeskus eli piste A sijaitsee suoralla b, joten suoran b inversiokuva on suora itse ($b' = b$). Kuvataan inversiolla mielivaltaisen A-keskisen ympyrän suhteen myös annettu ympyrä C. Ympyrän C inversiokuva on ympyrä C' (eivät kumpikaan kulje inversiokeskuksen kautta). Etsitään kuvioiden b' ja C' yhteistangentit, jotka ovat suoran b' *suuntaiset* ympyrän C' tangentit, kaksin kappalein. Kyseiset yhdensuuntaiset yhteistangentit kuvautuvat inversiolla ympyrän A suhteen ratkaisuympyröiksi (kuvassa tiheämmällä katkoviivalla), jotka kulkevat tietenkin inversiokeskuksen eli pisteen A kautta. Kaikki kuviot on esitetty samassa kuvassa.

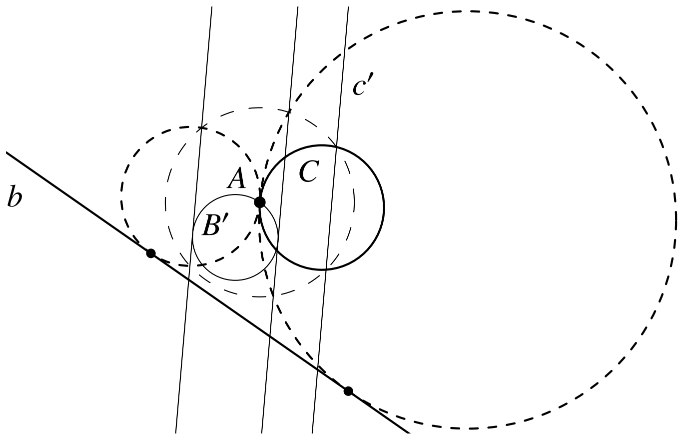


Tapa 2: Tapaus b ratkeaa myös PPS-menetelmän versiolla "pisteistä toinen sijaitsee suoralla", kunhan pienennetään ympyrä C (olkoon säde r) keskipisteekseen C'. Tällöin on siirrettävä suoraa b ja pistettä A suoran mukana. Piirretään siis suoran b kanssa yhdensuuntaiset suorat b' suoran b molemmin puolin (etäisyydelle r). Piirretään suoran b normaali pisteeseen A, jolloin pisteet A' löytyvät normaalin sekä suorien b' leikkauspisteistä. Käytetään PPS-menetelmää kolmikoihin $\{A'_1, b'_1, C'\}$ ja $\{A'_2, b'_2, C'\}$, jolloin löytyy kaksi tangenttiympyrää (ks. kuva i). Apu-

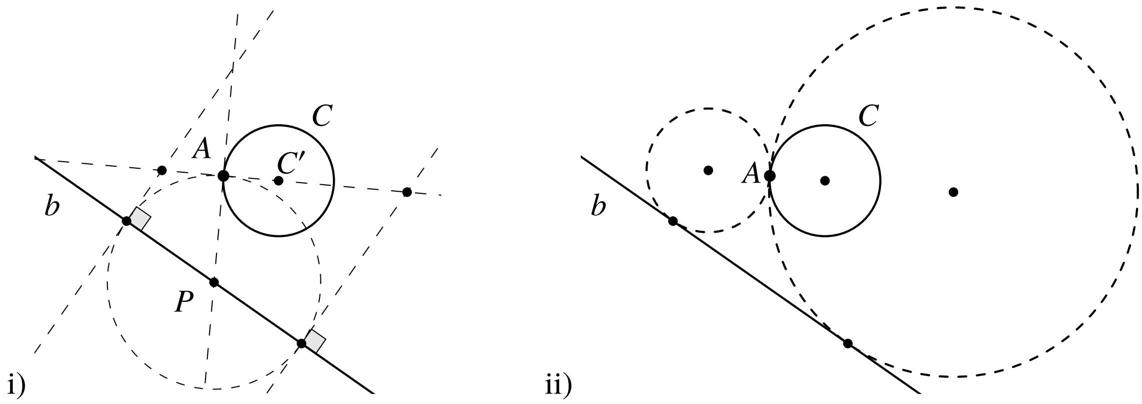


ratkaisuympyröiden *keskipisteet* ovat etsittävien ratkaisuympyröiden keskipisteet. *Kasvatetaan* suoraa b'_1 sivuavaa tangenttiympyrää säteen r verran, ja *pienennetään* suoraa b'_2 sivuavaa tangenttiympyrää säteen r verran, jolloin saadaan ratkaisuympyrät (ks. kuva ii). Ratkaisuista toinen sivuaa ympyrää C sisäisesti ja toinen ulkoisesti.

`Tapaus c:` Suora b ja ympyrä C sijaitsevat erillään toisistaan. Sijaitkoon piste A *ympyrällä* ($A \in C$ jolloin $A \notin b$). Esitellään kaksi erilaista ratkaisutapaa. Tapa 1: PSY-menetelmää käyttäen inversiokeskuksena on piste A, joten ympyrä C kuvautuu inversiolla (mielivaltaisen A-keskisen ympyrän suhteen) suoraksi c'. Suora b kuvautuu inversiokeskuksen kautta kulkevaksi ympyräksi B'. Konstruoidaan kaksikon $\{B', c'\}$ yhteistangentit, eli piirretään ympyrän B' suoran c' *suuntaiset* tangentit, joita on kaksi. Kuvataan yhdensuuntaiset yhteistangentit inversiolla ympyrän A suhteen ratkaisuympyröiksi (kuvassa tiheämmällä katkoviivalla).



Tapa 2: Olkoon ympyrän C keskipiste C'. Ratkaisuympyrät löytyvät soveltaen PPS-menetelmää "pisteet sijaitsevat samalla puolen suoraa". Ratkaisuympyröitä on kaksi, ja niiden keskipisteet sijaitsevat suoralla AC'. Piirretään pisteeseen A ympyrän C *tangentti*, joka on suoran AC' normaali. Tangentti leikkaa suoran b pisteessä P, joten kutsutaan tangenttia suoraksi AP (ks. kuva i). PPS-menetelmässä suora AP sivuaisi tavallisesti kahta annettua pistettä, mutta nyt



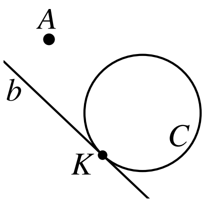
suora AP sivuaa *yhtä* annettua pistettä annetun *ympyrän määräämässä asennossa*. Etsitään PPS-menetelmän P-keskinen inversioympyrä. Piirretään A-keskinen $|AP|$-säteinen ympyrä. Piirretään janan AP keskinormaali. Keskinormaalin ja ympyrän A leikkauspisteet ovat etsityn inversioympyrän kehäpisteitä, joten piirretään P-keskinen ympyrä kulkemaan niiden kautta. Ympyrä P leikkaa suoran b kahdessa pisteessä, jotka ovat etsittyjen ratkaisuympyröiden *sivuamispisteet*. Piirretään sivuamispisteisiin suoran b normaalit, jotka leikkaavat suoran AC'. Leikkauspisteet ovat ratkaisuympyröiden *keskipisteet*. Näillä tiedoilla voidaan piirtää ratkaisuympyrät (kuvassa ii katkoviivalla).

Suora ja ympyrä sivuavat toisiaan (PSY-tapaukset d–g)

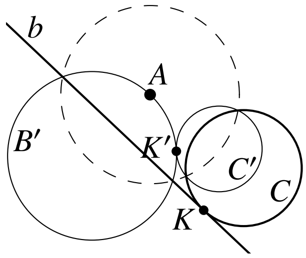
Sivutkoot annetut suora b ja ympyrä C toisiaan pisteessä $K \in b \cap C$. Pisteen A sijainti määrää, mikä tapauksista d–g on kyseessä.

`Tapaus d:` Suora b ja ympyrä C sivuavat toisiaan pisteessä K. Sijaitkoon piste A *erillään* muista annetuista kuvioista ($A \notin b \cup C$). Piste voi tällöin sijaita ympyrän C sisä- tai ulkopuolella, ja ulkopuolella sijaitessaan piste voi sijaita ympyrän kanssa joko samalla tai eri puolella suoraa b. Annetulla kolmikolla on siispä tapauksessa d olemassa *kolme* oleellisesti erilaista asetelmaa. Ratkaisuympyröitä on tapauksissa d olemassa yksi tai kolme.

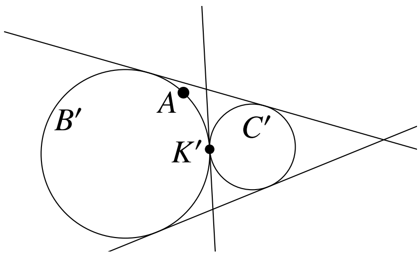
Tarkastellaan ensimmäiseksi asetelmaa, jolle on olemassa kolme ratkaisua. Sijaitkoon siis piste A ympyrän C *ulkopuolella* ja ympyrän kanssa *samalla puolella* suoraa b (ks. kuva i). Ratkaisut löydetään PSY-menetelmällä. Annetut suora ja ympyrä sivuavat toisiaan pisteessä K, minkä vuoksi niiden inversiokuvat eli ympyrät B' ja C' sivuavat toisiaan pisteessä K' (ks. kuva ii). Inversiokuville on olemassa sivuamisen takia kolme yhteistangenttia (ks. kuva iii). Kuvataan löydetyt kolme yhteistangenttia inversiolla ympyrän A suhteen, jolloin saadaan kolme



i)

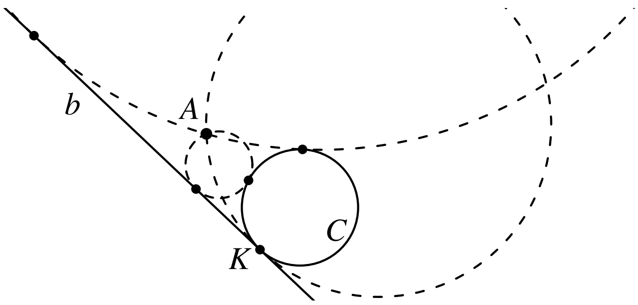


ii)



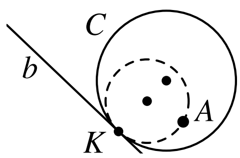
iii)

ratkaisuympyrää. Ratkaisuympyröistä kaksi (joiden yhteistangentit leikkaavat ympyröiden B' ja C' ulkoisessa homotetiapisteessä) sivuavat ympyrää C *ulkoisesti*. Kolmas ratkaisuympyrä (jonka yhteistangentti kulkee pisteen K' kautta) sivuaa ympyrää C *sisäisesti* kulkien annettujen kuvioiden b ja C välisen sivuamispisteen K kautta.

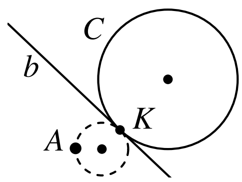


Tapauksen d muissa mahdollisissa asetelmissa, joissa piste A sijaitsee ympyrän C *sisällä* tai *eri puolella* suoraa b kuin ympyrä C, on olemassa ainoastaan yksi ratkaisuympyrä (ks. kuvat iv ja v). Kyseiset pistettä $K \in b \cap C$ sivuavat ratkaisut löydetään toki PSY-menetelmällä vastaavasti

iv)

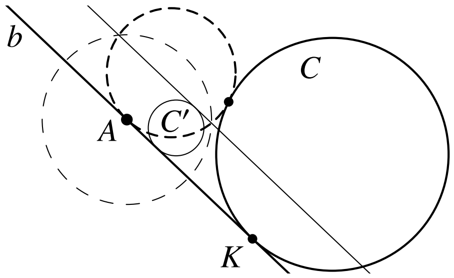


v)

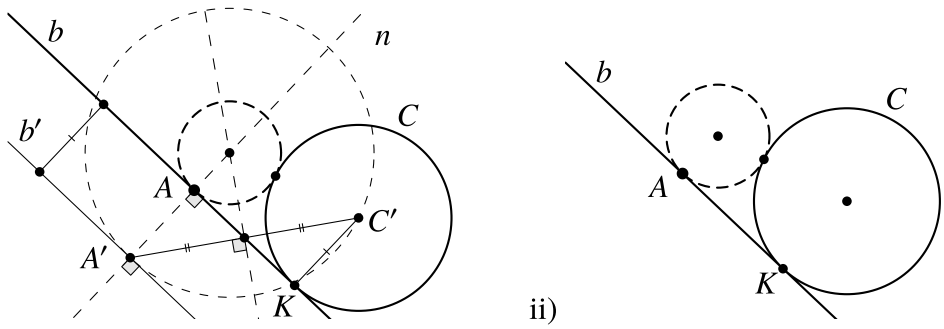


kuin edellä, mutta vaihtoehtona on etsiä ratkaisut myös toisella (piirtämisen kannalta hieman helpommalla) tavalla: Olkoon ympyrän C keskipiste C'. Ratkaisuympyröiden keskipisteet sijaitsevat suoralla KC', joka on suoran b normaali. Käytetään PPS-menetelmän tapausta "pisteistä toinen sijaitsee suoralla" kolmikolle $\{A, K, b\}$, sillä nyt etsitään suoraa b pisteessä $K \in b$ sivuavia ratkaisuja. Piirretään janan AK keskinormaali, joka leikkaa suoran KC'. Leikkauspiste on ratkaisuympyrän keskipiste. Ratkaisuympyrän tunnettuja kehäpisteitä ovat pisteet A ja K, joten ratkaisuympyrät voidaan piirtää.

`Tapaus e:` Suora b ja ympyrä C sivuavat toisiaan pisteessä K. Sijaitkoon piste A *suoralla* ($A \in b$) mutta ei ympyrällä ($A \notin C$), jolloin siis $A \in b \setminus \{K\}$. Esitetään kaksi erilaista ratkaisutapaa. Tapa 1: PSY-menetelmällä piirretty ratkaisuympyrä on esitetty kuvassa tiheämmällä katkoviivalla.

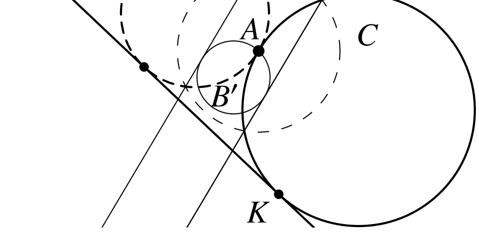


Tapa 2: Ratkaisuympyrän keskipiste sijaitsee pisteen A kautta kulkevalla suoran b normaalilla n. Ratkaisuympyröitä on olemassa vain yksi (ympyrää C) ulkoisesti sivuava, joka löytyy soveltamalla PPS-menetelmän tapausta "pisteistä toinen sijaitsee suoralla". Kutistetaan siis ympyrä C keskipisteekseen C' (olkoon säde r). Piirretään suoran b kanssa yhdensuuntainen suora b' etäisyyden r verran kauemmaksi pisteestä C'. Piste A' löytyy normaalin n ja suoran b' leikkauspisteestä. Etsitään kolmikon $\{A', b', C'\}$ ratkaisuympyrän keskipiste PPS-menetelmällä (ks. kuva i). Löydetty keskipiste on myös alkuperäisen kolmikon $\{A, b, C\}$ ratkaisuympyrän keskipiste. Ratkaisu kulkee pisteen A kautta, joten tarvittavat tiedot tunnetaan (ks. kuva ii).

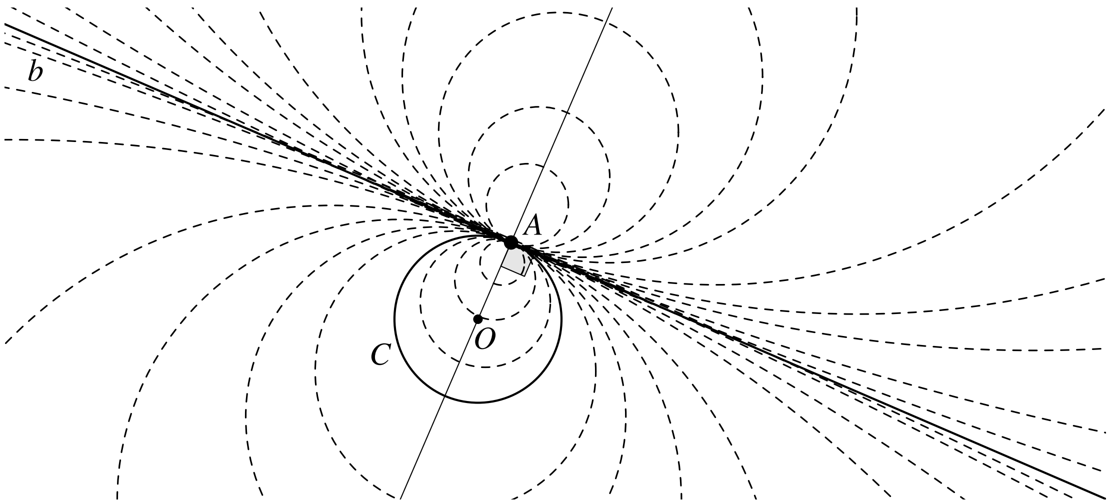


i) ii)

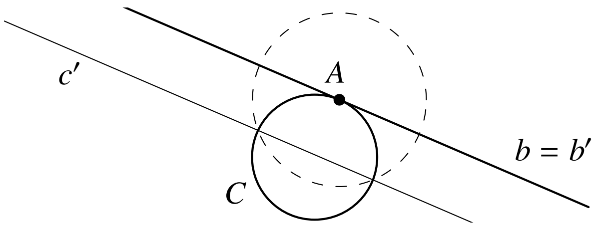
`Tapaus f:` Suora b ja ympyrä C sivuavat toisiaan pisteessä K. Sijaitkoon piste A *ympyrällä* ($A \in C$) mutta ei suoralla ($A \notin b$), jolloin siis $A \in C \setminus \{K\}$. Ratkaisuympyröitä on olemassa vain yksi ulkoisesti sivuava ympyrä, jonka keskipiste sijaitsee pisteen A ja ympyrän C keskipisteen kautta kulkevalla suoralla. Kuvassa on esitetty PSY-menetelmällä piirretty ratkaisu (tiheämmällä katkoviivalla). Tapauksen f ratkaisuympyrä on oikeastaan täysin vastaavanlainen kuin tapauksen e ratkaisuympyrä.



`Tapaus g:` Suora b ja ympyrä C sivuavat toisiaan pisteessä K. Sijaitkoon piste A suoran ja ympyrän *sivuamispisteessä*, joten $A = K \in b \cap C$. Ratkaisuympyröitä on tällöin olemassa ääretön määrä. Olkoon ympyrän C keskipiste O. Suora b on ympyrän C tangentti ja kohtisuorassa suoraa OA vastaan. Ratkaisuympyröiden keskipisteet $X \neq O$ sijaitsevat suoralla OA, eli mielivaltaisessa suoran OA pisteessä poislukien piste O (sillä muutoin kyseessä olisi ympyrä C). Ratkaisuympyrät ovat muotoa $(X, |XA|)$. Tapauksen g ratkaisuympyröitä on helppoa piirtää



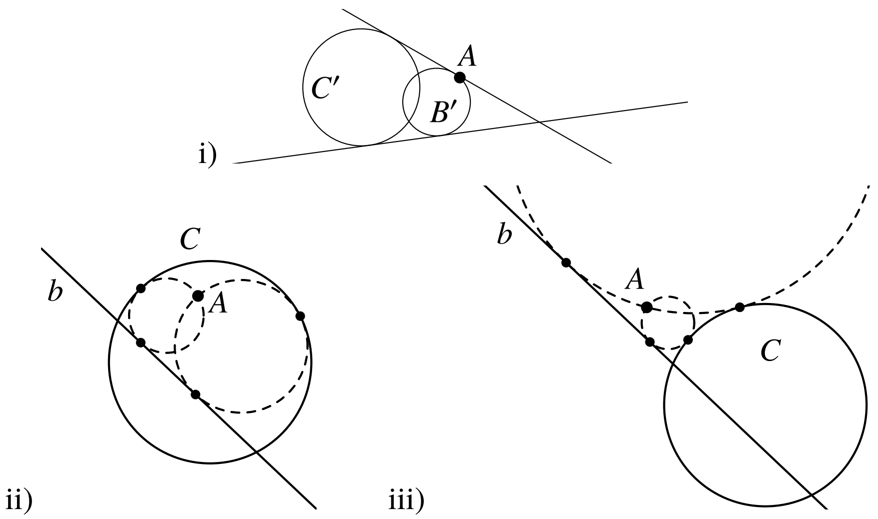
harpilla pelkästään apusuoran OA avulla. Näytetään kuitenkin vielä, että PSY-menetelmä toimii myös tällaisessa tapauksessa. Suora b ja ympyrä C kuvautuvat inversiolla A-keskisen ympyrän suhteen yhdensuuntaisiksi suoriksi $b' = b \parallel c'$. Suorien kanssa yhdensuuntaisia suoria eli yhteistangentteja on olemassa ääretön määrä, minkä takia myös ratkaisuympyröitä on ääretön määrä. Yhteistangenteiksi kelpaavat kaikki yhdensuuntaiset suorat, paitsi suorat c' ja b'.



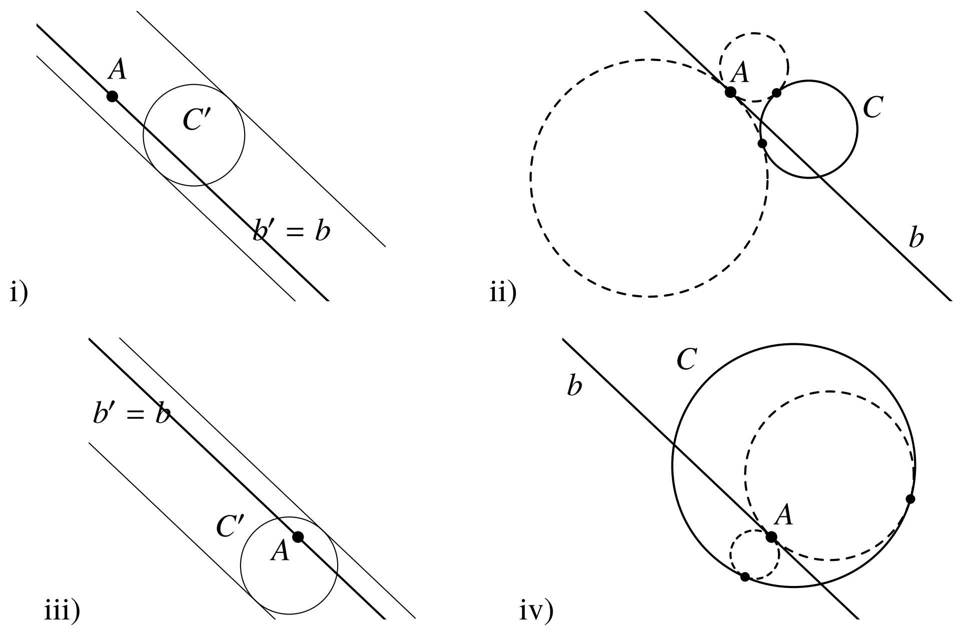
Suora ja ympyrä leikkaavat toisensa (PSY-tapaukset h–k)

Leikatkoot suora b ja ympyrä C toisensa. Pisteen A sijainti määrää, mikä tapauksista h–k on kyseessä.

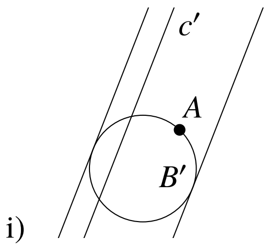
`Tapaus h:` Suora b ja ympyrä C leikkaavat toisensa. Sijaitkoon piste A *erillään* muista annetuista kuvioista ($A \notin b \cup C$). Piste voi tällöin sijaita ympyrän C sisä- tai ulkopuolella sekä eri puolilla suoraa b. Suoran eri puolilla sijaitseminen ei kuitenkaan tuota uusia erilaisia asetelmia, joten merkitsevää on ainoastaan pisteen sijaitseminen ympyrän *kehän eri puolilla*. Annetulla kolmikolla on tapauksessa d täten olemassa *kaksi* oleellisesti erilaista asetelmaa. Ratkaisuympyrät löydetään PSY-menetelmällä. Tapauksessa h annetut suora ja ympyrä leikkaavat toisensa, jolloin niiden inversiokuvat ovat aina toisensa leikkaavat ympyrät B' ja C'. Yhteistangentteja on siksi olemassa aina ainoastaan kaksi sellaista, jotka leikkaavat toisensa ympyröiden ulkoisessa homotetiapisteessä (ks. kuva i). Ratkaisuympyröitä on täten olemassa aina kaksi. Kuvissa ii ja iii on esitetty kolmikon $\{A, b, C\}$ ratkaisuympyrät (katkoviivalla), kun piste A sijaitsee ympyrän C sisä- tai ulkopuolella.

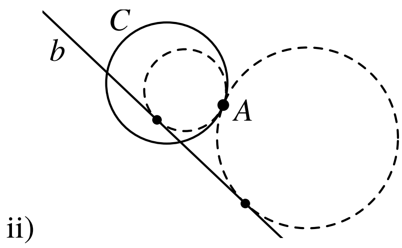


`Tapaus i:` Suora b ja ympyrä C leikkaavat toisensa. Sijaitkoon piste A *suoralla* ($A \in b$) mutta ei ympyrällä ($A \notin C$), jolloin siis $A \in b \setminus C$. Koska suora leikkaa ympyrän, niin piste voi tällöin sijaita ympyrän ulkopuolella tai sisäpuolella. Molemmat tapaukset on esitetty seuraavissa kuvissa (ylemmällä rivillä olevissa kuvissa piste $A \in b$ sijaitsee ympyrän C ulkopuolella, ja alemmalla rivillä ympyrän sisäpuolella). Käytetään PSY-menetelmää, eli kuvataan suora ja ympyrä mielivaltaisen A-keskisen ympyrän suhteen. Tällöin suoran b inversiokuva on suora itse ($b' = b$), koska inversiokeskus A sijaitsee suoralla. Ympyrä C kuvautuu inversiokeskuksen kautta kulkemattomaksi ympyräksi C'. Inversiokuvat b' ja C' leikkaavat toisensa, koska niin tekevät alkuperäisetkin kuviot. Yhteistangentteja on olemassa kaksi, jotka sivuavat ympyrää C' suoran b' suuntaisesti (ks. kuvat i ja iii). Kuvataan yhteistangentit inversiolla A-keskisen ympyrän suhteen, jolloin saadaan (katkoviivalla esitetyt) ratkaisuympyrät (ks. kuvat ii ja iv).

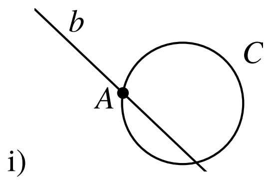


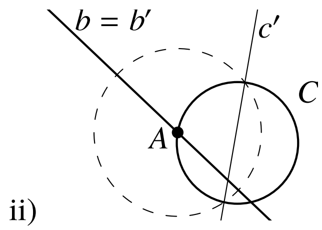
`Tapaus j:` Suora b ja ympyrä C leikkaavat toisensa. Sijaitkoon piste A *ympyrällä* ($A \in C$) mutta ei suoralla ($A \notin b$), jolloin siis $A \in C \setminus b$. Piirretään ratkaisut PSY-menetelmällä. Suoran b ja ympyrän C inversiokuvat A-keskisen ympyrän suhteen ovat toisensa leikkaavat ympyrä B' ja suora c'. Inversiokuville on olemassa kaksi suoran c' suuntaista yhteistangenttia (ks. kuva i). Kuvataan yhteistangentit inversiolla A-keskisen ympyrän suhteen ratkaisuympyröiksi, joita on siis olemassa kaksi: yksi annettua ympyrää ulkoisesti ja yksi sisäisesti sivuava ratkaisu (ks. kuva ii).





`Tapaus k:` Suora b ja ympyrä C leikkaavat toisensa. Sijaitkoon piste A annettujen suoran ja ympyrän *leikkauspisteessä* ($A \in b \cap C$). Ratkaisuympyrän pitäisi sivuta toisaalta suoraa b pisteessä A ja toisaalta ympyrää C pisteessä A, jolloin suoran b pitäisi olla ympyrän C tangentti, mitä se ei ole. Ratkaisuympyröitä ei siksi ole olemassa (ks. kuva i). Samaan toteamukseen päädytään myös PSY-menetelmällä, sillä kuvioiden b ja C inversiokuvat ovat tapauksessa k erisuuntaiset suorat $b' = b \nparallel c'$, joten yhteistangentteja ei ole olemassa (ks. kuva ii).



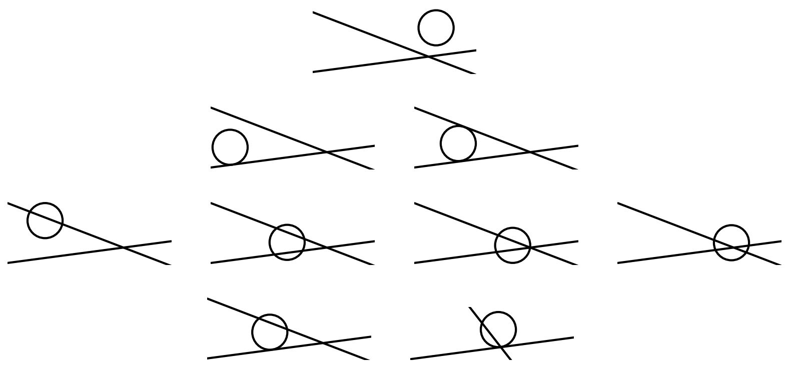


3.7 Suora – suora – ympyrä (SSY)

Olkoot annetut kuviot kaksi suoraa a ja b sekä ympyrä C (keskipisteensä C mukaan nimettynä). Ratkaisuympyröitä on tällöin olemassa enintään kahdeksan. Annetut *suorat voivat* joko *leikata* toisensa tai olla *yhdensuuntaiset*, joten tarkastellaan molemmat asetelmat erikseen.

Annetut suorat leikkaavat toisensa (SSY)

Annetut suorat *leikkaavat* toisensa ($a \nparallel b$) jakaen tason neljään sektoriin. Annetuista suorista ja ympyrästä muodostuu erilaisia asetelmia sen mukaan, millä eri tavoin annettu ympyrä voi sijoittua suoriin nähden. Annettu *ympyrä voi* sijaita erillään suorista, sivuta yhtä suoraa kohtaamatta toista, sivuta molempia suoria, leikata yhden suoran kohtaamatta toista tai leikata molemmat suorat (jolloin suorien leikkauspiste voi sijaita ympyrän ulkopuolella, kehällä tai sisäpuolella). Annettu ympyrä voi lisäksi yhtä aikaa sekä sivuta yhtä suoraa ja leikata toisen suoran (jolloin ympyrän ja suoran sivuamispiste voi sijaita erikoistapauksena suorien leikkauspisteessä).

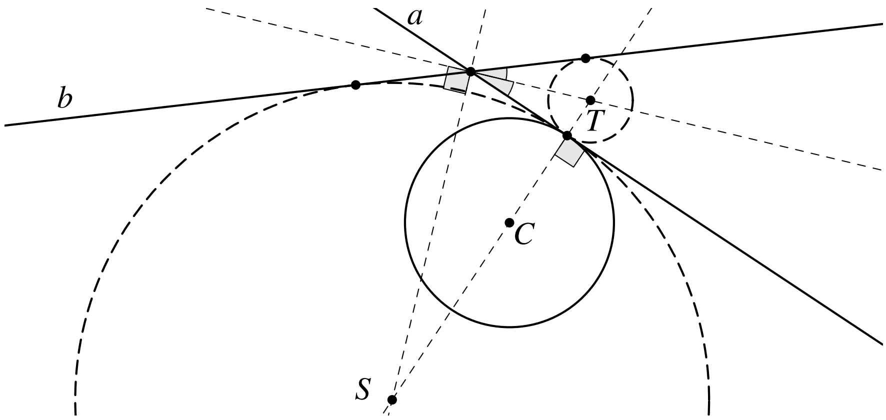


Ratkaisuympyröitä on olemassa leikkaavien suorien tapauksessa enintään kahdeksan. Ratkaisuympyröiden *keskipisteet* sijaitsevat leikkaavien suorien tapauksessa aina annettujen suorien välisten kulmien *kulmanpuolittajilla*, koska ainoastaan siten ympyrä voi sivuta molempia suoria. Ristikkäisillä sektoreilla on yhteinen kulmapuolittaja. Ratkaisuympyröitä on mahdollista löytää vain niistä sektoreista, joiden alueelle annettu ympyrä yltää (riittää myös kyseisen sektorin reunasuoran sivuaminen).

Ratkaisumenetelmät, kun annetut suorat leikkaavat toisensa (SSY)

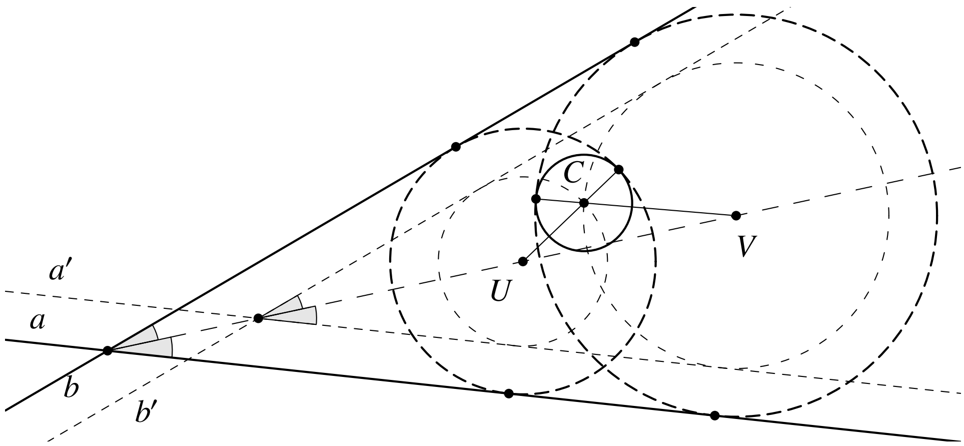
Ratkaisuympyrät löydetään kolmella erilaisella menetelmällä siten, että kukin menetelmistä tuottaa vain osan ratkaisuista. Jos annettu ympyrä *sivuaa* annettua suoraa tai molempia annettuja suoria, etsitään ratkaisuja menetelmällä L1 (löydettävissä joko kaksi tai ei yhtäkään ratkaisua). Jos annettu ympyrä sijaitsee *erillään* annetuista suorista, löydetään aina kaksi ratkaisua menetelmällä L2. Kaikki loput ratkaisut löytyvät menetelmällä L3, joka toimii annetun ympyrän sijaitessa *missä tahansa*.

`Menetelmä SSY-L1:` *Sivutkoon* ympyrä C *vähintään yhtä* annettua suoraa (oletetaan a) mielivaltaisessa suoran a pisteessä. Piirretään suoran a normaali, joka kulkee ympyrän C keskipisteen (piste C) sekä kuvioiden välisen sivuamispisteen kautta. Piirretään annettujen suorien väliset kulmanpuolittajat. Normaali leikkaa kulmanpuolittajat pisteissä S ja T, jotka ovat ratkaisuympyröiden keskipisteet. Ratkaisuympyrä T sivuaa annettua ympyrää ulkoisesti ja ratkaisuympyrä S sisäisesti (ympyrän C ympärillä). Jos ympyrä C sivuaa *molempia* annettuja suoria, niin sisäisesti sivuavaa ratkaisua ei ole olemassa (koska tällöin leikkauspiste $S = C$). Koska kuitenkin myös suora b sivuaa ympyrää C, niin b:n toiselta puolelta löydetään vastaava ratkaisuympyrä kuin T (itse asiassa yhtenevä, sillä asetelma on symmetrinen pisteen C kautta kulkevan kulmanpuolittajan suhteen). Jos ympyrä C sivuaa suoraa a ja *lisäksi leikkaa* suoraa b, sijaitsee sisäisesti sivuava ratkaisuympyrä S ympyrän C sisällä. Jos ympyrä C sivuaa annettua suoraa *suorien leikkauspisteessä*, ei tällä menetelmällä löydetä lainkaan ratkaisuja (menetelmällä L3 kuitenkin löydetään). Menetelmällä löydetään siis joko kaksi tai ei yhtäkään ratkaisua.



Huomautus. Milloin on olemassa (annettua ympyrää) sisäisesti sivuavia ratkaisuympyröitä? Kuten edellä huomattiin, niin *sisäisesti* sivuavia ratkaisuympyröitä ei ole olemassa, mikäli ympyrä C *sivuaa molempia* annettuja suoria. Ratkaisuympyrän sisäinen sivuaminen on mahdotonta myös, jos annettu ympyrä *leikkaa yhtä* annettua suoraa. Annettua ympyrää sisäisesti sivuava ratkaisuympyrä voi olla joko ympyrän C *sisällä* tai *ympärillä* (edellisellä menetelmällä L1 löydetään molempia). Apollonioksen ongelmassa ratkaisuympyrä voi ympäröidä ympyrän C vain, jos ympyrä C on *kokonaan* annettujen suorien välissä siten, että sallitaan enintään yhden annetun suoran sivuaminen. Ympyrän C sisällä sijaitsevia ratkaisuja löydetään menetelmillä L1 ja L3. Ympyrän C ympärillä sijaitsevia ratkaisuja löydetään menetelmillä L1 ja L2.

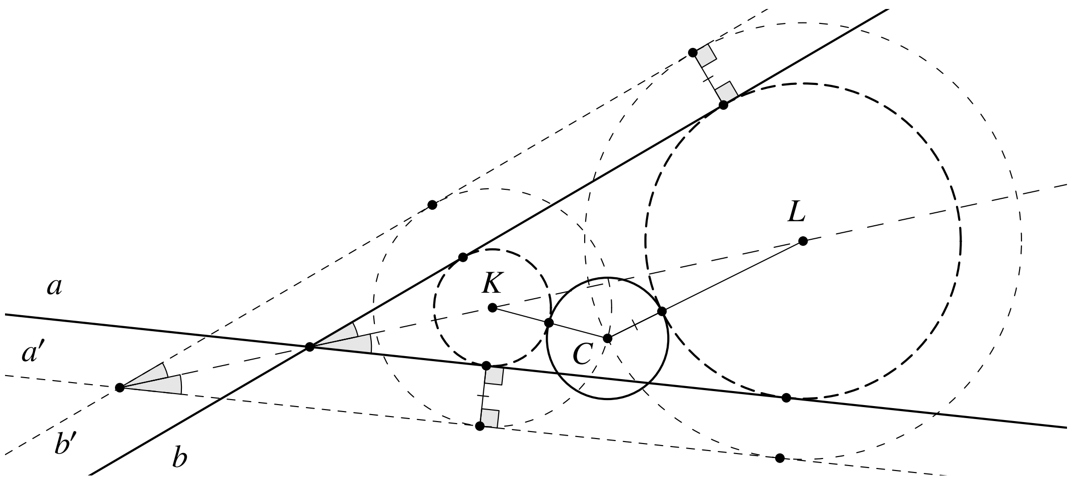
`Menetelmä SSY-L2:` Sijaitkoon ympyrä C *erillään* annetuista suorista. Tällä menetelmällä etsitään annettua ympyrää sisäisesti sivuavia ratkaisuympyröitä, jotka *ympäröivät* annetun ympyrän. Tällaisia ratkaisuja on olemassa kaksi. Olkoon ympyrän C säde r. Ympyrää C sisäisesti sivuavat ratkaisuympyrät löytyvät PSS-menetelmällä (ks. luku 3.4) siten, että yhdensuuntaiset suorat a' ja b' piirretään *pienentäen* käsiteltävää sektoria. Kutistetaan siis ympyrä C keskipisteekseen C. Piirretään annettujen suorien kanssa yhdensuuntaiset suorat $a' \parallel a$ ja $b' \parallel b$, kumpikin etäisyyden r päähän alkuperäisestä siten, että käsiteltävä sektori *pienenee* (uuden sektorin kärki sijaitsee alkuperäisen sektorin sisällä). Noudatetaan PSS-menetelmää kolmikolle $\{a', b', C\}$, kunnes on löydetty ratkaisuympyröiden keskipisteet (kuvassa pisteet U ja V). Ympyröiden keskipisteiden kautta kulkevat suorat UC ja VC leikkaavat ympyrän C, joten kyseisistä leikkauspisteistä löytyvät ympyröiden väliset sivuamispisteet (jotta saadaan selville ratkaisuympyrän säde). Toisaalta, ratkaisuympyrä sivuaa myös annettuja suoria, joten ratkaisuympyrän kehäpisteen voi selvittää myös annetulle suoralle piirretyn (pisteen C kautta kulkevan) normaalin avulla. Ratkaisuympyrä voidaan piirtää keskipisteen ja kehäpisteen avulla.



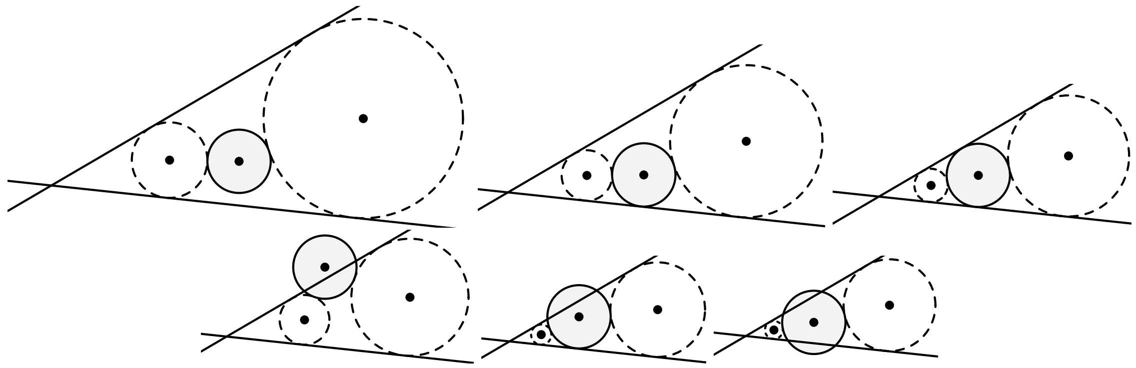
`Menetelmä SSY-L3:` Sijaitkoon ympyrä C *missä tahansa*. Tätä menetelmää täytyy käyttää tarpeen mukaan jokaiseen sektoriin erikseen, koska konstruktion apukolmikko ja apuympyrä ovat hieman erilaiset eri sektoreille. Menetelmä löytää *tarkasteltavasta sektorista* ympyrää C *ulkoisesti* sivuavat ratkaisuympyrät ja tarkasteltavan sektorin *ristikulmassa olevasta sektorista* ympyrää C *sisäisesti* sivuavat ratkaisuympyrät (ympyrän C *sisältä*) – mikäli ratkaisuja on kyseisissä sektoreissa olemassa. Menetelmällä L3 löydettäviä ulkoisesti sivuavia ratkaisuja on olemassa leikkaavien suorien tapauksessa *aina*. Menetelmällä löydettäviä ympyrän C sisällä sijaitsevia sisäisesti sivuavia ratkaisuja puolestaan on olemassa *ainoastaan*, jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat.

Menetelmän vaiheet: Olkoon ympyrän C säde r. Kutistetaan ympyrä C keskipisteekseen C (säde r menee nollaksi). Valitaan käsiteltävä sektori. Piirretään annettujen suorien kanssa yhdensuuntaiset suorat $a' \parallel a$ ja $b' \parallel b$, kumpikin etäisyyden r päähän alkuperäisestä siten, että käsiteltävä sektori *suurenee*, jolloin siis suorien a' ja b' leikkauspiste sijaitsee alkuperäisen tarkasteltavan sektorin ulkopuolella. Tarkasteltavassa sektorissa ja sen ristikkäissektorissa sijaitsevien (ympyrää C) sivuavien ratkaisuympyröiden *keskipisteet* löytyvät PSS-menetelmällä (ks. luku 3.4) käyttäen PSS-apukolmikkoa (suora a', suora b' ja piste C). Sitten etsitään enää ratkaisuympyrän *kehäpiste*. Ratkaisuympyrän ja ympyrän C keskipisteiden kautta kulkeva suora leikkaa ympyrän C kahdessa pisteessä, joista valitaan se, jonka kautta kulkeva ratkaisuympyrä sivuaa myös annettuja suoria. Menetelmällä löydetään kerralla enintään kaksi ratkaisuympyrää.

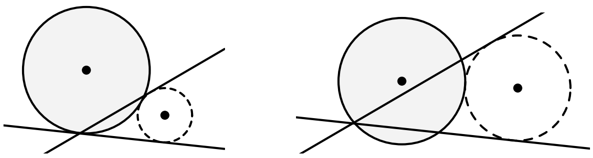
Jos ympyrä C sijaitsee tarkasteltavassa sektorissa enemmän kuin yhden pisteen verran (sektorin ulkopuolinen sivuaminen ei riitä), *ja* annettujen suorien leikkauspiste sijaitsee ympyrän C



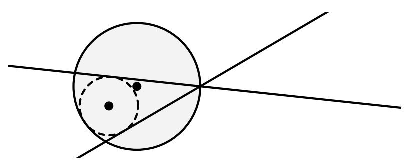
ulkopuolella, niin tarkasteltavasta sektorista löytyy aina kaksi ulkoisesti sivuavaa ratkaisuympyrää. Seuraavissa havainnollistuskuvissa on esitetty ratkaisuympyrät katkoviivalla ja annettu ympyrä harmaana.



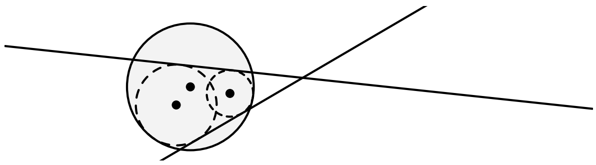
Jos ympyrä C sijaitsee tarkasteltavassa sektorissa enemmän kuin yhden pisteen verran (sektorin ulkopuolinen sivuaminen ei riitä), *ja* annettujen suorien leikkauspiste sijaitsee ympyrän C *kehällä*, niin tarkasteltavasta sektorista löytyy vain yksi ulkoisesti sivuava ratkaisuympyrä.



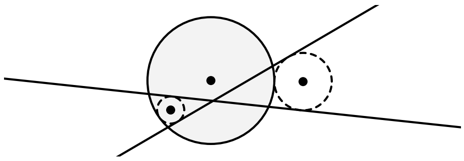
Jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat, *ja* annettujen suorien leikkauspiste sijaitsee ympyrän C *kehällä*, niin ympyrän C sisällä on olemassa yksi sisäisesti sivuava ratkaisuympyrä. Kyseinen ratkaisu löytyy valitsemalla tarkasteltavaksi sektoriksi ratkaisuympyrästä katsoen ristikkäinen sektori.



Jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat, *ja* annettujen suorien leikkauspiste sijaitsee ympyrän C *ulkopuolella*, niin ympyrän sisällä on olemassa kaksi sisäisesti sivuavaa ratkaisua. Kyseiset ratkaisut löytyvät valitsemalla tarkasteltavaksi sektoriksi ratkaisuympyröistä katsoen ristikkäinen sektori.



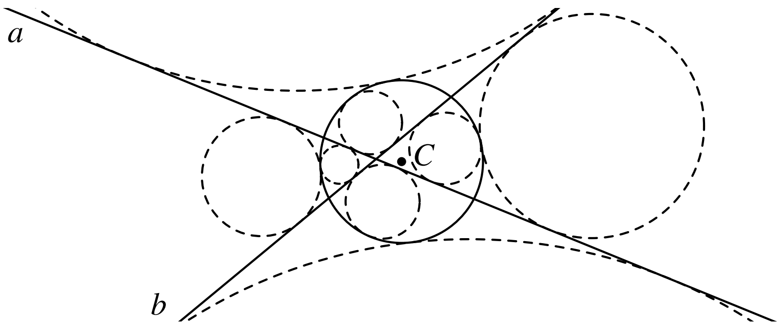
Jos annetut suorat leikkaavat ympyrän C *sisällä*, niin löydetään tarkasteltavasta sektorista yksi ulkoisesti sivuava ratkaisu ja ristikkäisestä sektorista annetun ympyrän sisäpuolelta yksi sisäisesti sivuava ratkaisu.



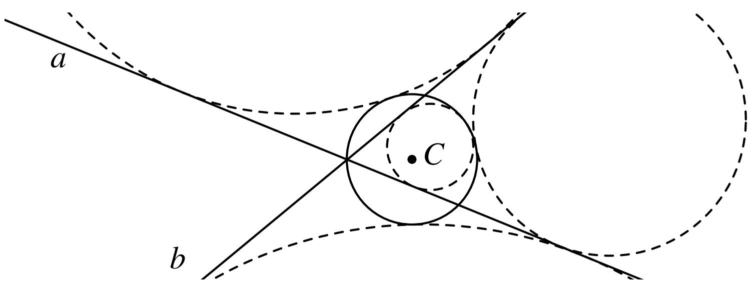
Ratkaisukonstruktiot, kun annetut suorat leikkaavat toisensa (SSY)

Esitellään seuraavaksi *ratkaisukonstruktiot* tämän alaluvun alussa esitetyn kuvan (s. 53) tapauksille.

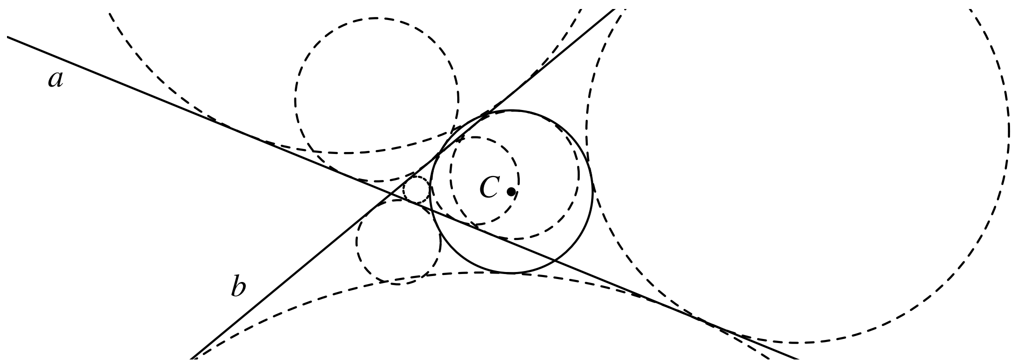
Jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat siten, että *suorien välinen leikkauspiste* sijaitsee ympyrän C *sisäpuolella*, on ratkaisuja kahdeksan. Ratkaisut löytyvät käyttämällä menetelmää L3 jokaiseen neljään sektoriin.



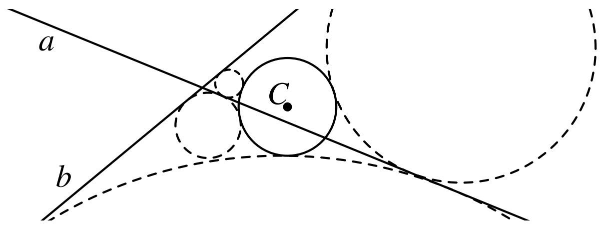
Jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat siten, että *suorien välinen leikkauspiste* sijaitsee ympyrän C *kehällä*, on ratkaisuja neljä. Sisäisesti sivuavia ratkaisuympyröitä on yksi ja ulkoisesti sivuavia kolme. Ratkaisuympyrät löydetään menetelmällä L3.



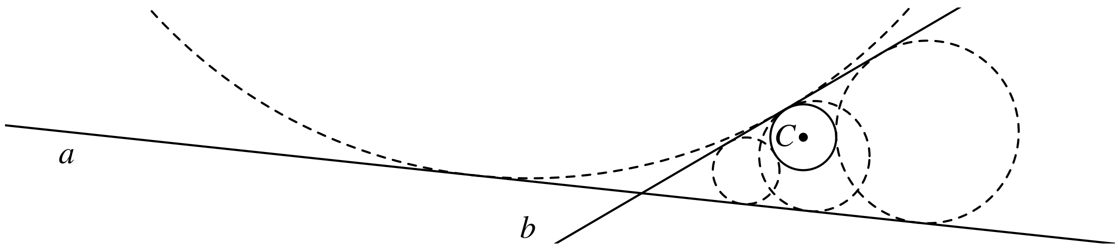
Jos ympyrä C leikkaa molemmat annetut suorat siten, että *suorien välinen leikkauspiste* sijaitsee ympyrän C *ulkopuolella*, on ratkaisuja kahdeksan. Sisäisesti sivuavia ratkaisuympyröitä on kaksi ja ulkoisesti sivuavia kuusi. Sisäisesti sivuavat ratkaisut löydetään käyttämällä menetelmää L3 tyhjään sektoriin ja ulkoisesti sivuavat ratkaisut käyttämällä menetelmää L3 kolmeen muuhun sektoriin, joiden alueella ympyrä C sijaitsee.



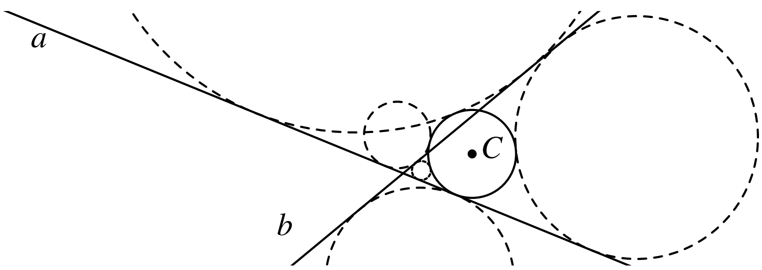
Jos ympyrä C leikkaa täsmälleen yhden annetuista suorista (eikä kosketa toista suoraa lainkaan), on ratkaisuympyrän mahdotonta sivuta ympyrää C sisäisesti. Tällöin kaikki ratkaisuympyrät ovat ulkoisesti sivuavia, ja niitä on olemassa neljä. Ratkaisut löytyvät käyttämällä menetelmää L3 kahteen sektoriin, joiden alueella ympyrä C sijaitsee.



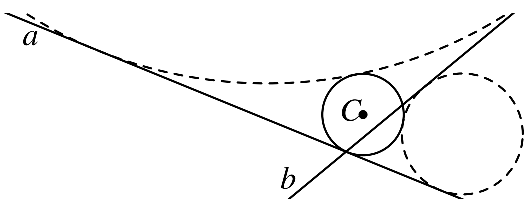
Jos ympyrä C sivuaa täsmälleen yhtä annettua suoraa, on sisäisesti sivuavia ympyröitä olemassa yksi ja ulkoisesti sivuavia ympyröitä kolme. Ratkaisuympyrät löytyvät menetelmillä L1 ja L3.



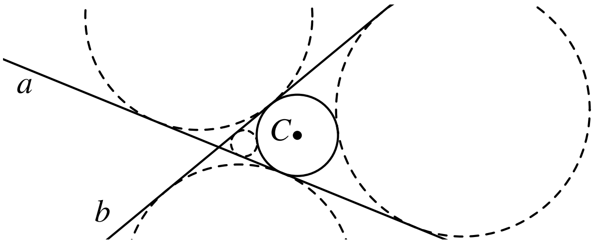
Jos ympyrä C sivuaa suoraa a (muualla kuin suorien välisessä leikkauspisteessä) ja leikkaa suoran b, on ratkaisuja neljä: kolme ulkoisesti sivuavaa ja yksi sisäisesti sivuava ratkaisuympyrä. Ratkaisut löydetään menetelmillä L1 ja L3.



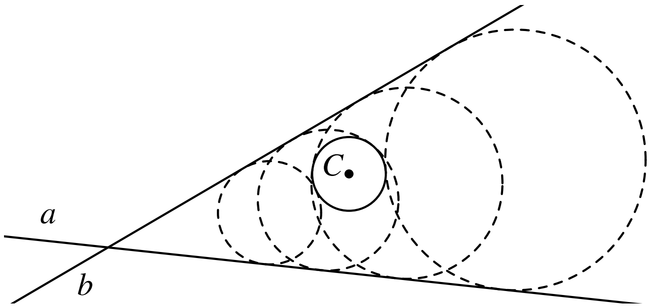
Jos ympyrä C sivuaa suoraa *a suorien välisessä leikkauspisteessä*, on ratkaisuja olemassa kaksi. Ratkaisuympyrät ovat ulkoisesti sivuavia, ja ne löydetään menetelmällä L3.



Jos ympyrä C sivuaa molempia annettuja suoria, on olemassa ainoastaan ulkoisesti sivuavia ratkaisuja, joita on neljä. Ratkaisut löydetään menetelmillä L1 ja L3.

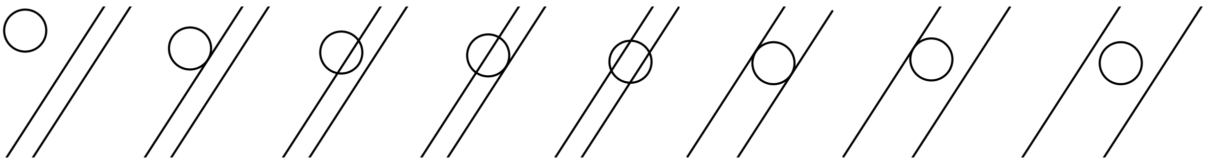


Jos ympyrä C sijaitsee erillään annetuista suorista (eli ympyrä $C \cap (a \cup b) = \emptyset$), on olemassa kaksi ulkoisesti ja kaksi sisäisesti sivuavaa ratkaisuympyrää, jotka sijaitsevat kaikki samassa sektorissa kuin ympyrä C. Sisäisesti sivuavat ratkaisuympyrät löydetään menetelmällä L2 ja ulkoisesti sivuavat menetelmällä L3.



Annetut suorat ovat yhdensuuntaiset (SSY)

Olkoot annetut suorat *yhdensuuntaiset* ($a \parallel b$). Annetuista suorista ja ympyrästä muodostuu erilaisia asetelmia sen mukaan, millä eri tavoin annettu ympyrä voi sijoittua suoriin nähden. Annettu *ympyrä C voi* sijaita erillään suorista (suorien välissä tai välisen alueen ulkopuolella), sivuta yhtä suoraa (suorien välissä tai välisen alueen ulkopuolella), sivuta molempia suoria, leikata yhden suoran tai leikata molemmat suorat. Annettu ympyrä voi lisäksi yhtä aikaa sekä sivuta yhtä suoraa ja leikata toisen suoran.

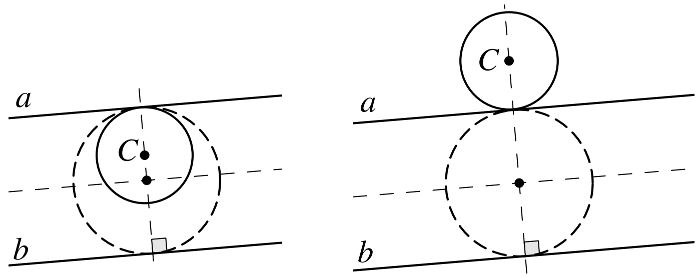


Ratkaisuympyrät sijaitsevat yhdensuuntaisten suorien tapauksessa aina annettujen suorien *välissä* sivuten molempia suoria, jolloin ratkaisuympyrän halkaisija on sama kuin suorien välinen etäisyys. Ratkaisuympyrä voi annettujen suorien välissä sivuta ympyrää C ulkoisesti, sisäisesti ympyrän C sisällä tai sisäisesti ympyrän C ympärillä. Ratkaisuja on olemassa annettujen kuvioiden asetelmasta riippuen nolla, yksi, kaksi, kolme tai neljä.

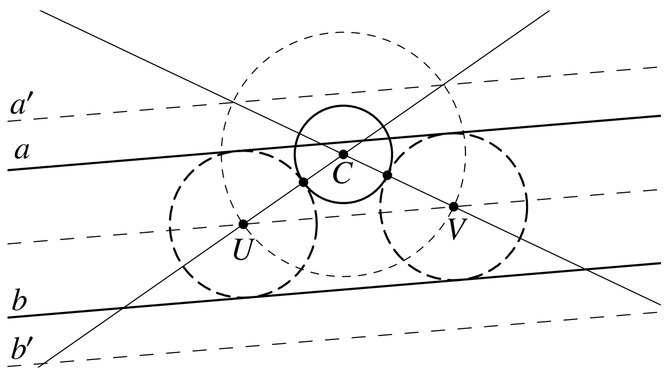
Ratkaisumenetelmät, kun annetut suorat ovat yhdensuuntaiset (SSY)

Ratkaisuympyröitä löydetään kolmella eri menetelmällä, jotka tuottavat kukin osan ratkaisuista: Jos ympyrä *C sivuaa yhtä* annettua suoraa, käytetään menetelmää Y1, jolla löytyy ulkoisesti tai sisäisesti sivuava ratkaisu. Jos ympyrä C sijaitsee *suorien välissä edes osittain* (enemmän kuin yksi kehäpiste), niin käytetään menetelmää Y2, jolla löydetään kaksi ulkoisesti sivuavaa ratkaisua. Loput sisäisesti sivuavat ratkaisut löydetään menetelmällä Y3, joka löytää ratkaisuja kaksin kappalein, kunhan ympyrä C *leikkaa molempia* suoria tai sijaitsee *erillään* suorista niiden *välissä*.

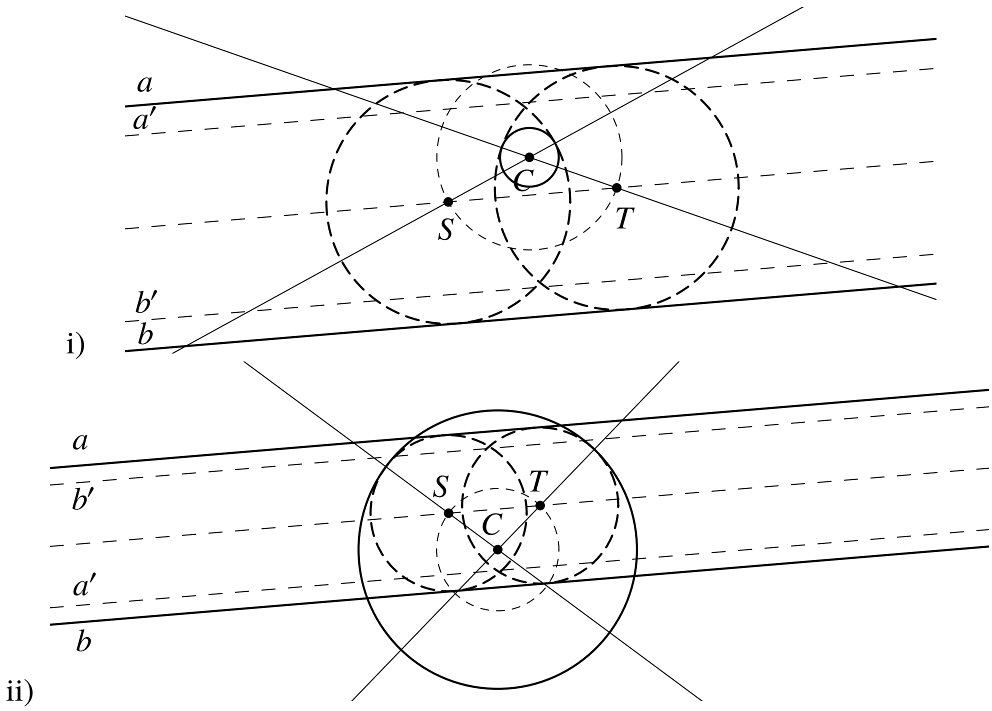
`Menetelmä SSY-Y1:` *Sivutkoon* ympyrä C (nimetty keskipisteensä mukaan) *yhtä* annettua suoraa pisteessä P. Suora PC on annettujen suorien normaali. Ratkaisuympyrän keskipiste sijaitsee suoralla PC annettujen suorien puolivälissä. Keskipiste löytyy siis puolittamalla kyseinen jana, joka on ratkaisuympyrän halkaisija. Ehto täsmälleen yhden suoran sivuamisesta johtuu siitä, että jos ympyrä C sivuaa molempia annettuja suoria, niin sen ympärille ei voi muodostaa sisäisesti sivuavaa ratkaisuympyrää.



`Menetelmä SSY-Y2:` Sijaitkoon ympyrä C edes osittain suorien välissä (oltava enemmän kuin yksi kehäpiste). Ulkoisesti sivuavat kaksi ratkaisuympyrää löytyvät soveltamalla PSS-menetelmää. Kutistetaan siis ympyrä C (säde r) keskipisteekseen C. Piirretään annettujen suorien kanssa yhdensuuntaiset suorat $a' \parallel a$ ja $b' \parallel b$, kumpikin etäisyyden r päähän alkuperäisestä ja *kauemmas* toisistaan. Piirretään yhdensuuntaisten suorien (a ja b) *puolivälissä* kulkeva yhdensuuntainen suora, jolla ratkaisuympyröiden keskipisteet sijaitsevat. Otetaan harppiin apusuorien a' ja b' välisen etäisyyden puolikas, ja piirretään C-keskinen apuympyrä. Apuympyrä leikkaa keskimmäisen yhdensuuntaisen suoran ratkaisuympyröiden *keskipisteissä* U ja V. Ratkaisuympyrän U *kehäpiste* löytyy suoran UC ja ympyrän C leikkauspisteestä (ympyrälle V vastaavasti).



`Menetelmä SSY-Y3:` Sijaitkoon ympyrä C annettujen suorien *välissä erillään* suorista, tai *leikatkoon* ympyrä C *molemmat* suorat. Molempiin tapauksiin toimii menetelmä Y3, joka on PSS-menetelmän sovellus. Kutistetaan siis ympyrä C (säde r) keskipisteekseen C. Piirretään annettujen suorien kanssa yhdensuuntaiset suorat $a' \parallel a$ ja $b' \parallel b$, kumpikin etäisyyden r päähän alkuperäisestä siten, että esimerkiksi suora a' piirretään suoran b *puolelle* suoraa a eli suoria siirretään *lähemmäs* tai *"lähemmäs"* toisiaan (tapauksessa, jossa C leikkaa suorat, on suorien välinen etäisyys pienempi kuin ympyrän C halkaisija, minkä takia piirrettävät apusuorat a' ja b' saattavat sijaita jopa kauempana toisistaan kuin alkuperäiset suorat). Piirretään yhdensuuntaisten suorien (a ja b) *puolivälissä* kulkeva yhdensuuntainen suora, jolla ratkaisuympyröiden keskipisteet sijaitsevat. Otetaan harppiin apusuorien a' ja b' välisen etäisyyden puolikas, ja piirretään C-keskinen apuympyrä (ks. kuvat i ja ii). Apuympyrä leikkaa keskimmäisen yhdensuuntaisen suoran ratkaisuympyröiden *keskipisteissä* S ja T. Ratkaisuympyrän S *kehäpiste* löytyy suoran SC ja ympyrän C leikkauspisteestä (ympyrälle T vastaavasti).

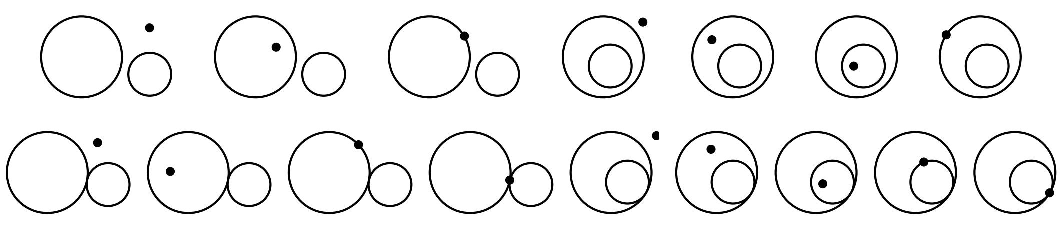


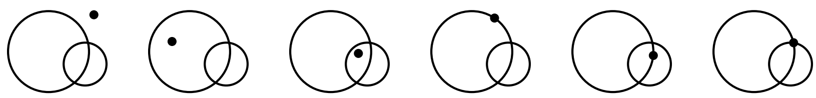
Ratkaisukonstruktiot, kun annetut suorat ovat yhdensuuntaiset (SSY)

Kaikki annetun kolmikon $\{a, b, C\}$ asetelmat, joissa suorat ovat yhdensuuntaiset, ratkeavat esitetyillä menetelmillä Y1, Y2 ja Y3. Jätetään ratkaisujen piirtäminen lukijalle. Mainitaan kuitenkin muutamia seikkoja: Ratkaisuja *ei ole olemassa*, kun ympyrä C sijaitsee annetuista suorista erillään muualla kuin suorien välissä. Ratkaisuja on olemassa *pariton* määrä tapauksissa, joissa ympyrä C sivuaa yhtä annettua suoraa (jolloin käytetään menetelmää Y1). Tämän alaluvun alussa esitetyssä kuvassa (s. 59) havainnollistetuissa kahdeksassa tapauksessa on olemassa olevien *ratkaisuympyröiden lukumäärä* seuraavanlainen (lueteltuna vasemmalta oikealle): 0, 1, 2, 3, 4, 2, 3 ja 4.

3.8 Piste – ympyrä – ympyrä (PYY)

Olkoot annetut kuviot piste A sekä ympyrät B ja C. Annetut ympyrät voivat sijaita toisiinsa nähden viidellä eri tavalla: *ympyrät voivat* olla erilliset toistensa ulkopuolella, olla erilliset sisäkkäin, sivuta toisiaan ulkoisesti, sivuta toisiaan sisäisesti tai leikata toisensa. *Piste puolestaan voi* olla erillään ympyröistä, sivuta yhtä ympyrää tai sivuta kerralla molempia ympyröitä (ympyröiden sivuamis- tai leikkauspisteessä). Annetuista kuvioista saadaankin muodostettua oleellisesti erilaisia asetelmia täten yhteensä seuraavaksi kuvin esitettävät runsaat kaksikymmentä tapausta.





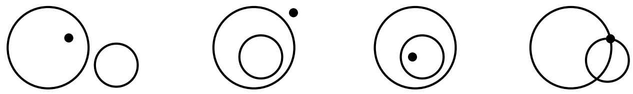
Ratkaisumenetelmä (PYY)

Piste–ympyrä–ympyräkolmikon kaikkiin erilaisiin asetelmiin löydetään ratkaisut yhdellä ainoalla menetelmällä, tismalleen vastaavasti kuin PSY-menetelmällä (ks. s. 45). Piirretään siis A-keskinen ympyrä mielivaltaisella säteellä. Kuvataan ympyrät B ja C inversiolla (ympyrän A suhteen), jolloin niiden inversiokuvat ovat suoria tai ympyröitä, eli kuviopareja $\{b', c'\}$, $\{b', C'\}$, $\{B', c'\}$ tai $\{B', C'\}$. Inversiokeskuksen kautta *kulkemattomat* ympyrät kuvautuvat nimittäin inversiokeskuksen kautta kulkemattomiksi ympyröiksi, ja inversiokeskuksen kautta *kulkevat* ympyrät kuvautuvat inversiokeskuksen kautta kulkemattomiksi suoriksi (lause 2.14). Piirretään inversiokuvien yhteistangentit (ks. s. 27). Yhteistangentit ovat etsittyjen ratkaisuympyröiden inversiokuvat. Kuvataan siis löydetyt yhteistangentit inversiolla ympyrän A suhteen. Inversiokeskuksen A kautta kulkematon suora (yhteistangentti) kuvautuu pistettä A sivuavaksi ympyräksi, joka sivuaa myös annettua suoraa b ja annettua ympyrää C (koska inversio säilyttää sivuavuuden).

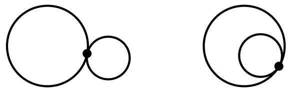
Ratkaisukonstruktiot (PYY)

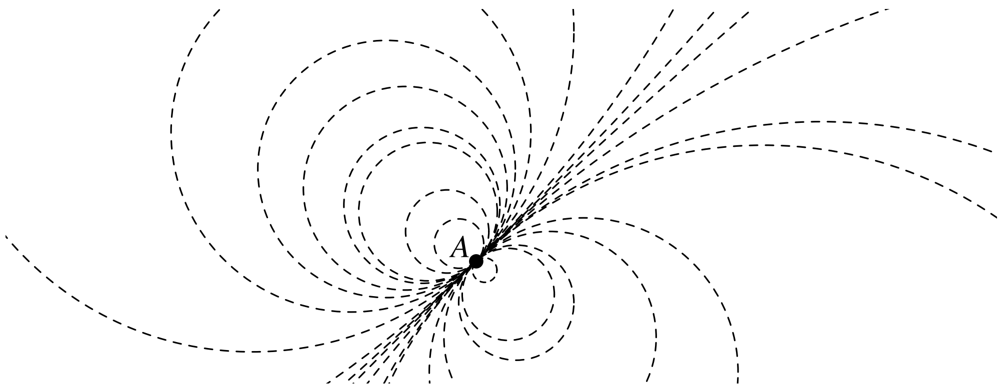
Ratkaisujen lukumäärä voi vaihdella PYY-kolmikoilla kuvioiden keskinäisestä sijainnista riippuen nollasta jopa äärettömään. Mahdollisia ratkaisujen lukumääriä ovat kuitenkin 0, 1, 2, 3, 4 ja ääretön.

Ratkaisua *ei ole olemassa*, jos piste ja ympyrä sijaitsevat *eri puolilla* toisen annetun ympyrän kehää. Ratkaisumenetelmä perustelee väitteen, koska tällöin annettujen ympyröiden B ja C inversiokuvat (inversioympyrän A suhteen) ovat keskenään erillään mutta sisäkkäin sijaitsevat ympyrät B' ja C', joille ei ole olemassa yhteistangenttia. Ratkaisua ei myöskään ole olemassa, jos piste A sijaitsee annettujen ympyröiden *leikkauspisteessä*. Tällöin ympyröiden B ja C inversiokuvat ovat erisuuntaiset suorat $b' \nparallel c'$, joille ei myöskään ole olemassa yhteistangenttia.

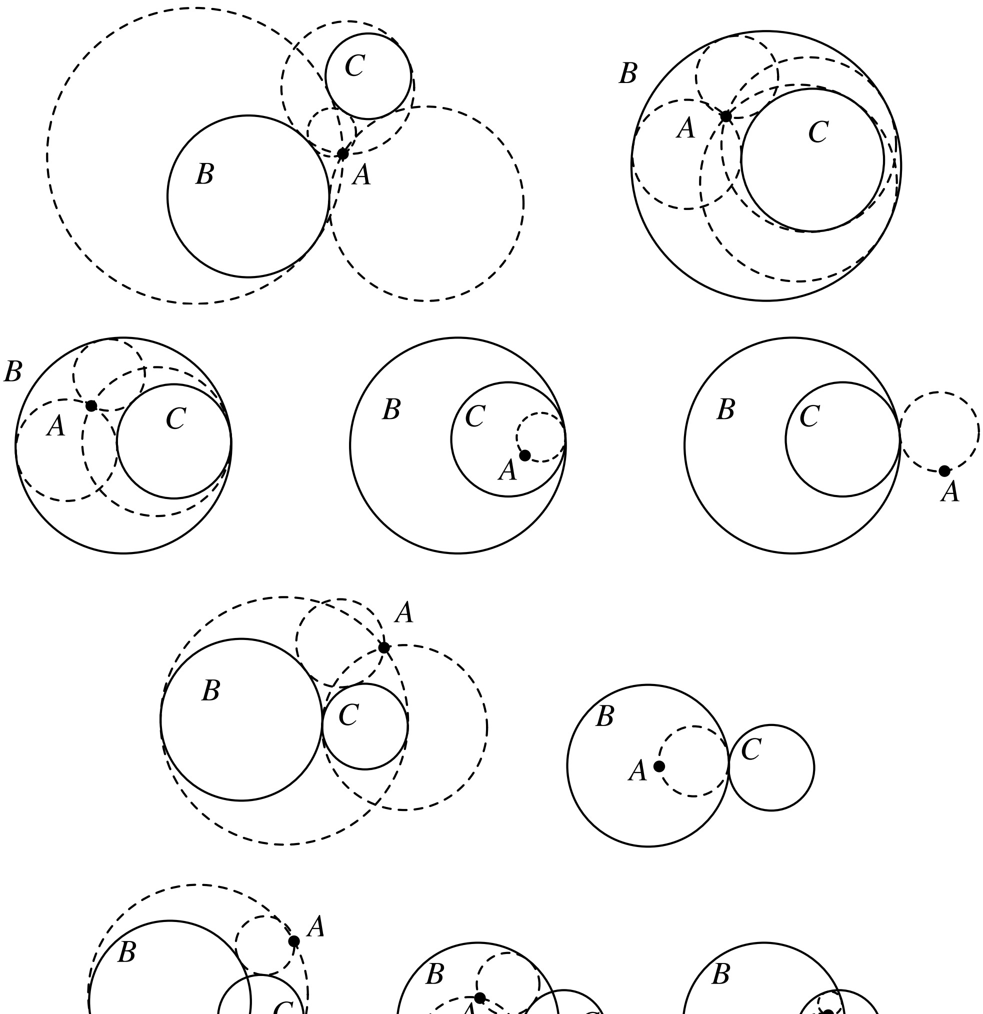


Ääretön määrä ratkaisuja puolestaan löytyy, kun piste A sijaitsee annettujen ympyröiden *sivuamispisteessä* (sisäinen ja ulkoinen sivuaminen). Tällöin ympyröiden B ja C inversiokuvat (inversioympyrän A suhteen) ovat yhdensuuntaiset suorat $b' \parallel c'$, jolloin yhteistangentteja ovat kaikki niiden kanssa yhdensuuntaiset suorat. Ratkaisuympyrät (katkoviivalla) ovat molemmille sivuamistapauksille lähes identtiset (poislukien ratkaisuympyröiden joukosta annetut ympyrät).



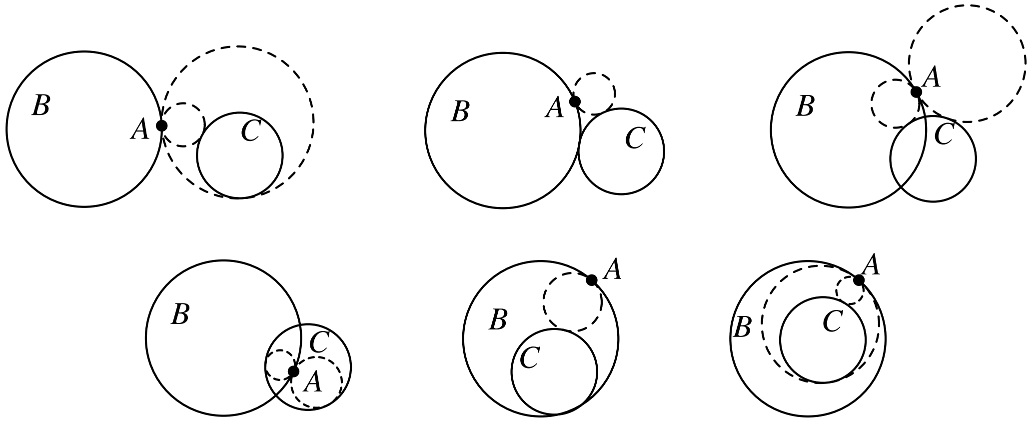


Esitellään seuraavaksi ratkaisukonstruktiot tapauksille, joissa piste A sijaitsee *erillään* annetuista ympyröistä (ja joille on olemassa ratkaisuja). Kyseiset kuvioasetelmat kuvautuvat inversiolla ympyrän A suhteen *ympyröiksi* B' ja C'. Kahdelle ympyrälle voidaan löytää enintään neljä yhteistangenttia (riippuen ympyröiden B ja C eli myös ympyröiden B' ja C' keskinäisestä sijainnista: erillään, sivuavat tai leikkaavat), joten myös ratkaisuympyröitä on täten olemassa *enintään neljä* – tarkemmin sanottuna 1, 2, 3 tai 4.



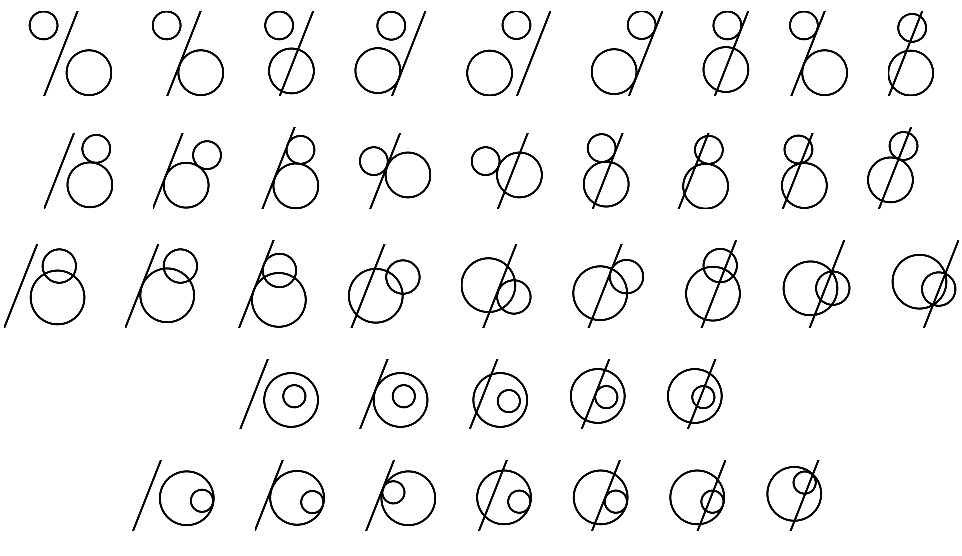
Esitellään seuraavaksi kaikki loput tapaukset, eli asetelmat, kun piste A (inversiokeskus) sijaitsee *annetulla ympyrällä* (oletetaan B). Tällöin ympyrä B kuvautuu inversiolla (mielivaltaisen

A-keskisen ympyrän suhteen) suoraksi b', joka ei kulje inversiokeskuksen kautta. Ympyrä C ei kulje inversiokeskuksen kautta, joten se kuvautuu ympyräksi C'. Suoralle ja ympyrälle on olemassa enintään kaksi yhteistangenttia (suoran b' suuntaiset ympyrän C' tangentit), joten näissä tapauksissa on täten olemassa *enintään kaksi* ratkaisuympyrää – tarkemmin sanoen 1 tai 2.



3.9 Suora – ympyrä – ympyrä (SYY)

Olkoot annetut kuviot suora a sekä ympyrät B ja C. Edelliseen tapaukseen PYY verrattuna vaihdetaan siis annettu piste suoraksi. Annetut ympyrät voivat sijaita toisiinsa nähden (samoin kuin PYY-tapauksessa esitetään eli) viidellä eri tavalla: *ympyrät voivat* sijaita erillään toistensa ulkopuolella, sijaita erillään sisäkkäin, sivuta toisiaan ulkoisesti, sivuta toisiaan sisäisesti tai leikata toisensa. Annettu *suora puolestaan voi* sijaita ympyrästä erillään, sivuta ympyrää tai leikata ympyrän. Ja koska ympyröitä on kaksi, voi suora esimerkiksi sivuta yhtä ympyrää ja leikata toisen ympyrän – kombinaatioita on lukuisia. Ympyrät voivat lisäksi sijaita kokonaan eri puolilla suoraa, osittain samalla puolella suoraa (sivuaminen ja leikkaaminen) tai molemmat kokonaan samalla puolella suoraa. Erikoistapauksia ovat lisäksi asetelmat, joissa suora kulkee (jossakin asennossa) ympyröiden välisen sivuamis- tai leikkauspisteen kautta. Oleellisesti erilaisia asetelmia onkin olemassa valtavan suuri joukko, eli seuraavaksi kuvin esitettävät lähes neljäkymmentä tapausta.



Ratkaisuympyrä sivuaa annettua suoraa jommalta kummalta puolelta suoraa. Annettuja ympyröitä puolestaan ratkaisuympyrä voi sivuta ulkoisesti tai sisäisesti.

Ratkaisuympyrä voi sivuta *molempia* annettuja ympyröitä *ulkoisesti*. Tällöin annettujen ympyröiden on sijaittava edes osittain *samalla* puolella annettua suoraa *ja* toisiinsa nähden siten, että ympyrät *eivät* ole erilliset sisäkkäin. Lukumääräisesti tällaisia ratkaisuja on olemassa yleensä enintään kaksi tai ääretön määrä.

Ratkaisuympyrä voi sivuta *molempia* annettuja ympyröitä *sisäisesti*. Tällaisia ratkaisuympyröitä voi olla olemassa, mikäli annetut ympyrät *eivät* ole erilliset sisäkkäin *eivätkä* kumpikaan leikkaa annettua suoraa. Lukumääräisesti tällaisia ratkaisuja on olemassa yleensä enintään kaksi tai ääretön määrä.

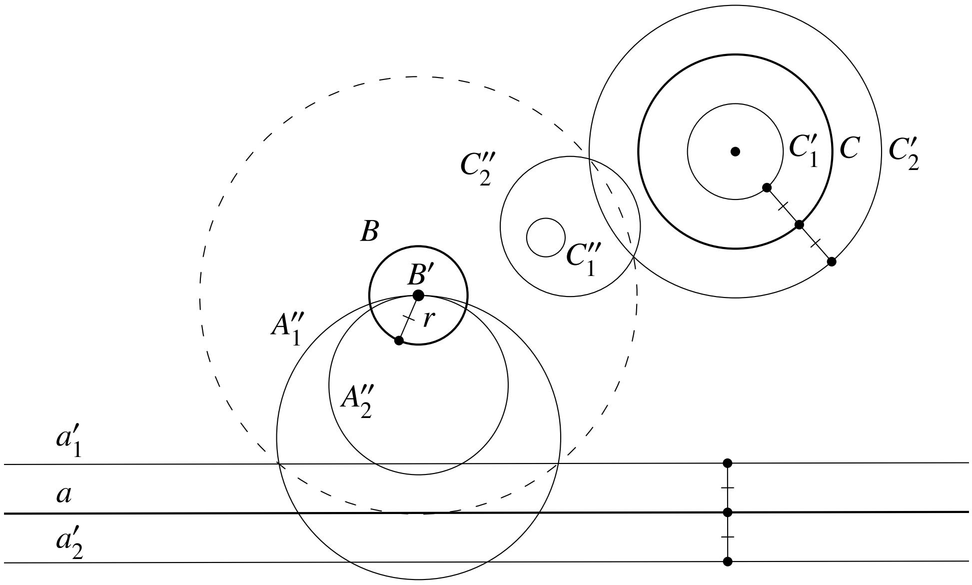
Ratkaisuympyrä voi sivuta *ensimmäistä* annettua ympyrää (oletetaan B) *ulkoisesti* ja *toista sisäisesti* (oletetaan C). Tällaisia ratkaisuympyröitä voi olla olemassa, mikäli annetut ympyrät *eivät* leikkaa toisiaan *eikä* ympyrä C leikkaa annettua suoraa. Lukumääräisesti tällaisia ratkaisuja on olemassa yleensä enintään kaksi tai ääretön määrä.

Ratkaisumenetelmät (SYY)

Ratkaisuympyrät löytyvät soveltamalla PSY-menetelmää. Tällöin on ensin muutettava annettu SYY-kolmikko sopivaksi PSY-apukolmikoksi kutistamalla annetuista ympyröistä *pienempi keskipisteekseen*. Apukolmikon muodostamisessa lisäksi pienennetään tai suurennetaan suurempaa ympyrää (kutistetun säteen verran), ja siirretään annettua suoraa a kutistetun säteen verran sivuille kumpaankin suuntaan siten, että $a' \parallel a$. Koska muodostettuja PSY-kolmikon apukuvioita on yksi piste, kaksi keskenään yhdensuuntaista suoraa ja kaksi erikokoista (samankeskistä) ympyrää, niin apukolmikko voidaan muodostaa neljällä eri tavalla. Kaikki neljä erilaista apukolmikkoa tuottavat äärellisessä tapauksessa kukin enintään kaksi ratkaisuympyrää.

PSY-menetelmä toimii apukolmikolle, kun annetut ympyrät ovat säteiltään *erisuuret*. Jos annetut ympyrät ovat säteiltään *yhtä suuret*, sovelletaan tarvittaessa PPS-menetelmää.

`Menetelmä SYY1:` Kutistetaan ympyröistä pienempi (oletetaan B, jonka säde on r) keskipisteekseen B'. *Kutistetaan* myös ympyrän C sädettä vastaavasti janan r verran, jolloin saadaan ympyrä C'. *Loitonnetaan* suoraa a etäisyyden r verran kauemmas pisteestä B', suoraksi $a' \parallel a$. Katso seuraavalla sivulla olevaa kuvaa 3.1 ja sen *kuvatekstiä*, joihin on tiivistetty SYY-menetelmien koko sisältö. Apukolmikkoa (eli suoraa a', pistettä B' ja ympyrää C') sivuavat tangenttiympyrät löytyvät PSY-menetelmällä – tai PPS-menetelmällä, mikäli annetut ympyrät ovat yhtä suuret. Piirretään siis suoran a' ja ympyrän C' inversiokuvat (B'-keskisen mielivaltaisen ympyrän suhteen), jolloin inversiokuvat ovat yleensä *ympyröitä* $\{A'', C''\}$ mutta joissakin tapauksissa *suoria* $\{a'', c''\}$. Annetun kuvion inversiokuva on suora, jos ja vain jos annettu suora tai ympyrä *kulkee* inversiokeskuksen B' kautta (vrt. lause 2.14). Piirretään inversiokuvien yhteistangentit. Yhteistangentteja syntyy äärellisessä tapauksessa enintään neljä, vaikka ratkaisuja pitäisi löytyä tällä menetelmällä enintään kaksi. Siispä vain osa yhteistangenteista tuottaa oikeanlaisen ratkaisuympyrän, joka sivuaa annettua SYY-kolmikkoa (loput yhteistangentit tuottavat ratkaisun kannalta vääränlaisia ympyröitä). Palataan tähän pulmaan tämän alaluvun lopussa. Kuvataan kaikki yhteistangentit inversiolla (B'-keskisen ympyrän suhteen), jolloin saadaan PSY-apukolmikon tangenttiympyrät (osa oikeanlaisia ja osa annetun kolmikon asetelman kannalta turhia). Kuvioiden välisiä etäisyyksiä vertaamalla nähdään, mitkä yhteistangentit tuottavat lopulta todellisia ratkaisuja myös SYY-kolmikolle. PSY-apukolmikon *oikeanlaisilla* tangenttiympyröillä on samat keskipisteet kuin annetun SYY-kolmikon ratkaisuympyröillä, joten on siis löydetty *ratkaisuympyröiden keskipisteet*. Etsitään kunkin ratkaisuympyrän jokin *kehäpiste* piirtämällä esimerkiksi suora, joka kulkee ratkaisun keskipisteen ja jomman kumman annetun ympyrän keskipisteen kautta (myös ratkaisun keskipisteen kautta kulkeva annetun suoran normaali käy). Ratkaisuympyrän kehäpiste löytyy piirretyn suoran ja annetun kuvion (toisesta) leikkauspisteestä.



Kuva 3.1: SYY. Annettu kolmikko $\{a, B, C\}$ sekä apukuviot $\{a_1', a_2', B', C_1', C_2'\}$ eli tekstissä mainitut apukolmikot $\{a', B', C'\}$. Lisäksi PSY-menetelmän mukaiset apukuvioiden inversiokuvat $\{A_1'', A_2'', C_1'', C_2''\}$ kuvattuina mielivaltaisen B'-keskisen ympyrän (katkoviivalla) suhteen. Yhteistangentit piirretään kuvioille C_1'' ja A_2'' (SYY1), C_1'' ja A_1'' (SYY2), C_2'' ja A_2'' (SYY3), sekä C_2'' ja A_1'' (SYY4).

`Menetelmä SYY2:` Kutistetaan pienempi ympyrä $B = (B', r)$ keskipisteekseen B'. *Kutistetaan* suurempaa ympyrää C janan r verran, ympyräksi C'. Siirretään suoraa a etäisyyden r verran *lähemmäs* pistettä B', suoraksi $a' \parallel a$. Käytetään PSY-menetelmää (tai PPS-menetelmällä, jos annetut ympyrät ovat yhtä suuret). Piirretään PSY-menetelmällä apukolmikon $\{a', B', C'\}$ inversiokuvat (B'-keskisen mielivaltaisen ympyrän suhteen), jolloin suoran a' ja ympyrän C' inversiokuvat ovat yleensä *ympyröitä* (tai joissakin tapauksissa *suoria*). Piirretään inversiokuvien $\{A'', C''\}$ yhteistangentit. Kuvataan yhteistangentit inversiolla (B'-keskisen ympyrän suhteen), jolloin saadaan apukolmikon tangenttiympyrät (osa oikeanlaisia ja osa turhia). PSY-apukolmikon *oikeanlaisilla* tangenttiympyröillä on samat keskipisteet kuin annetun SYY-kolmikon ratkaisuympyröillä, joten on löydetty *ratkaisuympyröiden keskipisteet*. Etsitään lisäksi kunkin ratkaisuympyrän jokin *kehäpiste* vastaavasti kuten edellä on selitetty. Tällä menetelmällä löydetään enintään kaksi ratkaisua, mikäli ratkaisuja on olemassa äärellinen määrä.

`Menetelmä SYY3:` Kutistetaan pienempi ympyrä $B = (B', r)$ keskipisteekseen B'. *Kasvatetaan* suurempaa ympyrää C janan r verran, ympyräksi C'. *Loitonnetaan* suoraa a kauemmas pisteestä B' etäisyyden r verran, suoraksi $a' \parallel a$. Apukolmikkoa $\{a', B', C'\}$ sivuavat (*oikeanlaiset*) tangenttiympyrät, eli myös *ratkaisuympyröiden keskipisteet*, löytyvät PSY-menetelmällä. Etsitään lisäksi kunkin ratkaisuympyrän jokin *kehäpiste* vastaavasti kuten edellä on selitetty. Tällä menetelmällä löydetään enintään kaksi ratkaisua, mikäli ratkaisuja on olemassa äärellinen määrä.

`Menetelmä SYY4:` Kutistetaan pienempi ympyrä $B = (B', r)$ keskipisteekseen B'. *Kasvatetaan* suurempaa ympyrää C janan r verran, ympyräksi C'. *Lähennetään* suoraa a kohti pistettä B' etäisyyden r verran, suoraksi $a' \parallel a$. Apukolmikkoa $\{a', B', C'\}$ sivuavat (*oikeanlaiset*) tangenttiympyrät, eli myös *ratkaisuympyröiden keskipisteet*, löytyvät PSY-menetelmällä. Etsitään lisäksi kunkin ratkaisuympyrän jokin *kehäpiste* vastaavasti kuten edellä on selitetty. Tällä menetelmällä löydetään enintään kaksi ratkaisua, mikäli ratkaisuja on olemassa äärellinen määrä.

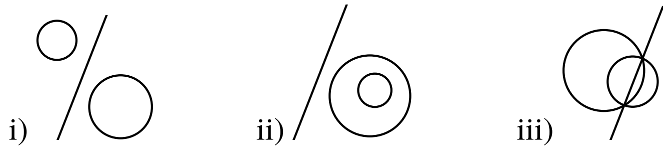
`Yhteistangenttien valitsemispulma:` Yhteistangentteja on olemassa äärellisessä tapauksessa yhteensä enintään kuusitoista. Annettujen kolmen kuvion keskinäinen sijoittuminen määrää sen, mikä tai mitkä yhteistangenteista sopivat juuri *kyseiselle* annetulle kolmikolle. Epäsopivat yhteistangentit tuottavat nimittäin tangenttiympyröitä, jotka sivuavat annetuista kuvioista vain kahta (mikä ei riitä). Miksi tällaisia hassuja melkein sopivia yhteistangentteja on olemassa? Pitkällisten piirtämisten ja kokeilujen jälkeen näyttäisi siltä, että epäsopivien tangenttien avulla sovelletusti piirretyt tangenttiympyrät sivuaisivat sittenkin jopa kaikkia kolmea annettua kuviota, kunhan annettuja kuvioita siirretään (onnistuu GeoGebralla) joksikin selvästi *toisenlaiseksi* asetelmaksi. Jokainen yhteistangentti tuottaa täten oletettavasti erään ratkaisun, *jonkinlaiseen* annettujen kuvioiden asetelmaan. Sopivan yhteistangentin valitsemiseksi ei kuitenkaan löytynyt mitään yleisesti sopivaa keinoa, ei, vaikka kirjoittaja kuinka yritti. SYY-menetelmää käytettäessä joudutaan siksi piirtämään kaikki mahdolliset (turhatkin) PSY-aputangenttiympyrät, minkä jälkeen tutkitaan, mitkä tangenttiympyröistä kelpaavat jatkokäsittelyyn.

Näitä ohjeita kirjoitettaessa on tarkasteltu toisistaan erillään ja toistensa ulkopuolella sijaitsevien annettujen kuvioiden tapausta. Kyseiselle asetelmalle on käytetty jokaista menetelmää SYY1–4 erikseen, jolloin on löydetty jokaisella neljällä menetelmällä neljä yhteistangenttia (yhteensä 16), niitä vastaavat PSY-kolmikon tangenttiympyrät, sekä tarvittaessa niitä vastaavat SYY-kolmikon tangenttiympyrät. Tarkasteltua asetelmaa (ja siten myös valmista konstruktiota) on pystytty kuitenkin yllättävän paljon muuttelemaan, jolloin on saatu kätevästi havainnollistettua erilaisia seuraavassa alaluvussa esitettäviä tapauksia. SYY-menetelmä on melkoisen työläs, joten toisenlaista lähtöasetelman konstruktiota ei ole tehty.

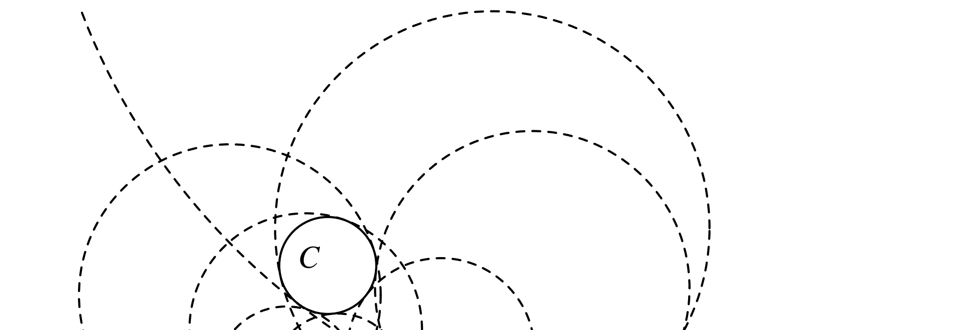
Ratkaisukostruktioita (SYY)

Tämän alaluvun alussa (s. 64) on esitetty kuvin lukuisia erilaisia annettujen kuvioiden *asetelmia*. Esitellään seuraavaksi *ratkaisukonstruktiot* kuvineen noin tusinalle asetelmalle.

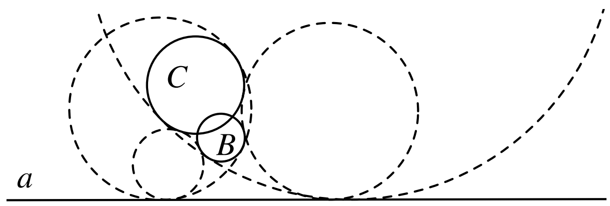
Ratkaisua *ei ole olemassa*, jos i) annetut ympyrät sijaitsevat erillään annetusta suorasta ja suoran eri puolilla. ii) annetut ympyrät sijaitsevat sisäkkäin erillään toisistaan ja erillään annetusta suorasta. iii) annettu suora kulkee annettujen ympyröiden leikkauspisteiden kautta.



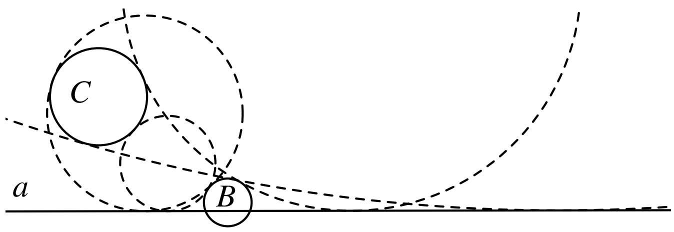
Jos annetut ympyrät sijaitsevat erillään toistensa ulkopuolella ja annetun suoran samalla puolella erillään suorasta, on ratkaisuja olemassa *kahdeksan* (SYY1–4).

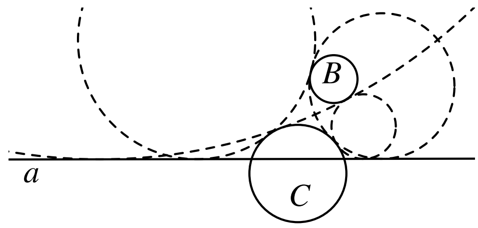


Jos annetut ympyrät leikkaavat toisensa ja sijaitsevat erillään annetusta suorasta, on ratkaisuja olemassa *neljä* (SYY1 ja SYY2).

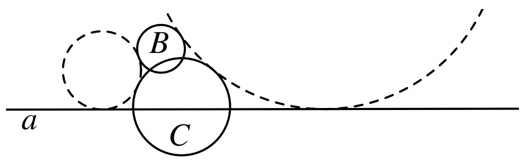


Jos annetuista ympyröistä ensimmäinen leikkaa annetun suoran, ja toinen ympyröistä sijaitsee erillään muista kuvioista, on ratkaisuja olemassa *neljä* (SYY1 ja SYY3; SYY1 ja SYY4).

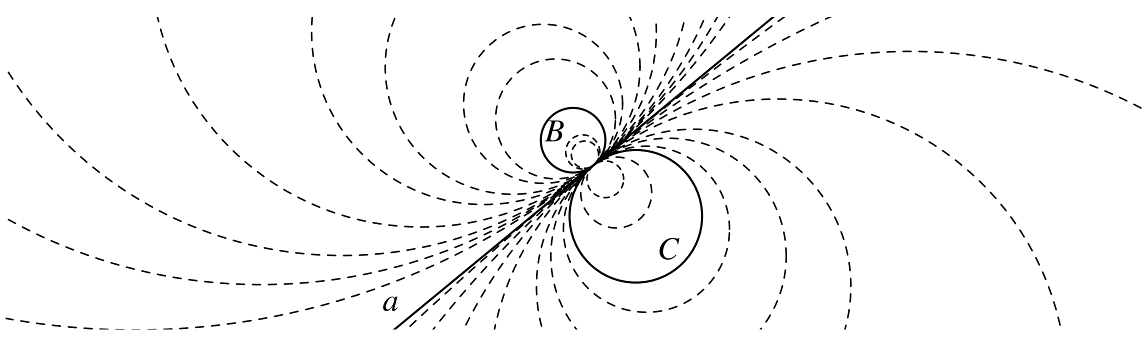




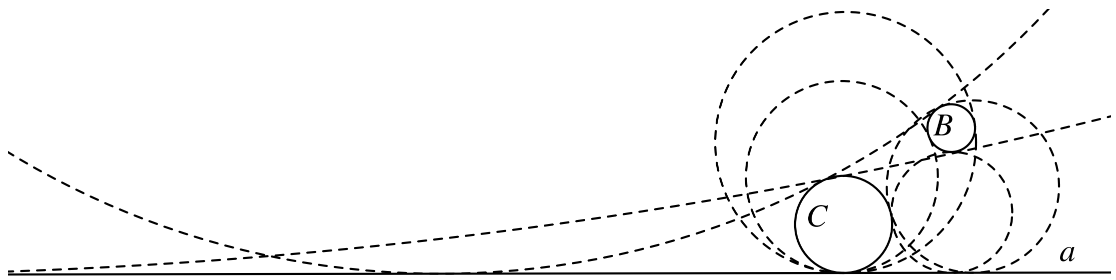
Jos annetut ympyrät leikkaavat toisensa, ja toinen ympyröistä leikkaa lisäksi annetun suoran, on ratkaisuja olemassa *kaksi* (SYY1).



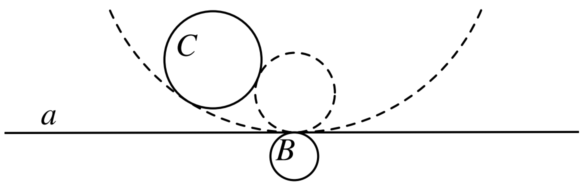
Jos annetut ympyrät sivuavat toisiaan (ulkoisesti tai sisäisesti), ja annettu suora sivuaa ympyröitä samassa sivuamispisteessä, on ratkaisuja olemassa *ääretön määrä* (identtiset kuvat, lukuun ottamatta annettuja ympyröitä). Jos annetut ympyrät sivuavat toisiaan *ulkoisesti*, niin ympyrät sijaitsevat tällöin *eri* puolilla suoraa, jolloin ratkaisut löydetään menetelmillä SYY3 ja SYY4. Jos annetut ympyrät sivuavat toisiaan *sisäisesti*, niin ympyrät sijaitsevat tällöin *samalla* puolella suoraa, jolloin ratkaisut löydetään menetelmällä SYY2. Yksinkertaisempaa tietysti on piirtää ratkaisuja niiden tietojen avulla, että ratkaisuympyröiden *keskipisteet* sijaitsevat suoran *a* normaalilla, joka kulkee ympyröiden sivuamispisteen kautta, ja että kaikkien annettujen kuvioiden yhteinen sivuamispiste on myös eräs ratkaisujen *kehäpiste*.



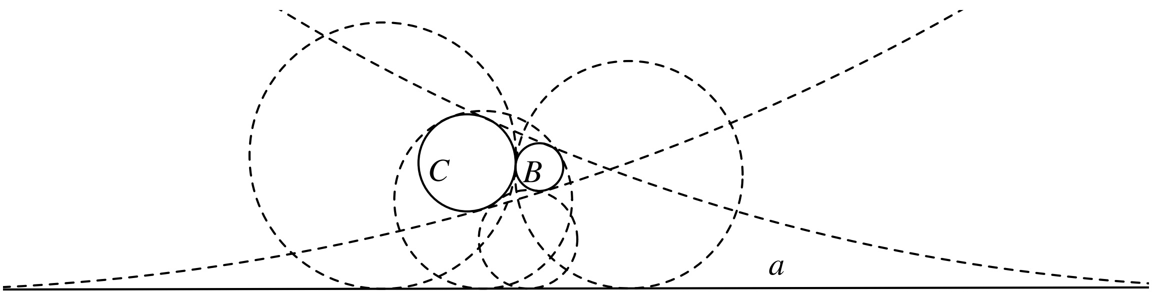
Jos suurempi annetuista ympyröistä sivuaa annettua suoraa, ja pienempi annettu ympyrä sijaitsee samalla puolella suoraa erillään muista kuvioista, on ratkaisuja olemassa *kuusi*: 2 (SYY1), 1 (SYY2), 1 (SYY3) ja 2 (SYY4). Jos ympyröiden koot ovat päinvastoin, on ratkaisuja olemassa vastaavasti *kuusi*: 2 (SYY1), 1 (SYY2), 2 (SYY3) ja 1 (SYY4).



Jos pienempi annetuista ympyröistä sivuaa annettua suoraa, ja suurempi annettu ympyrä sijaitsee eri puolella suoraa erillään suorasta, on ratkaisuja olemassa *kaksi*: 1 (SYY1) ja 1 (SYY3). Jos ympyröiden koot ovat päinvastoin, on ratkaisuja vastaavasti olemassa *kaksi*: 1 (SYY1) ja 1 (SYY4).



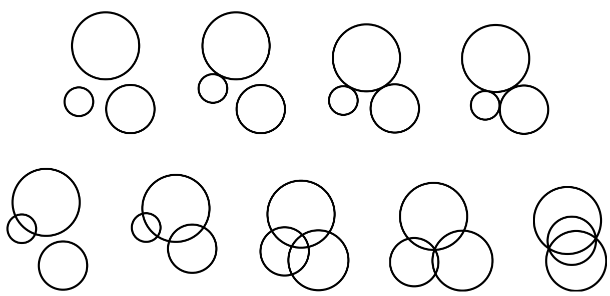
Jos annetut ympyrät sivuavat toisiaan ulkoisesti ja sijaitsevat erillään annetusta suorasta, on ratkaisuja *kuusi*: 2 (SYY1), 2 (SYY2), 1 (SYY3) ja 1 (SYY4).

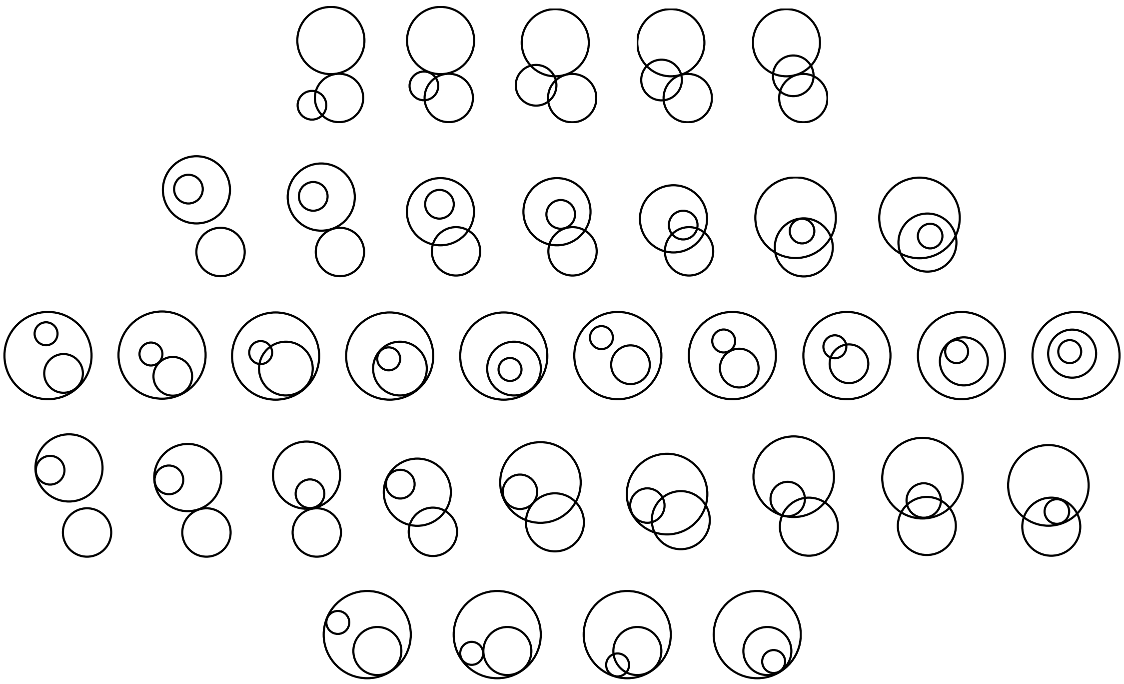


SYY-tapausten konstruoiminen on hirmuisen työlästä, joten jätetään loput tapaukset lukijalle.

3.10 Ympyrä – ympyrä – ympyrä (YYY)

Kolmen annetun ympyrän tapaus on kaikkein vaikein tapaus. Kaksi ympyrää ympyrät voivat sijaita toisiinsa nähden (samoin kuin PYY- ja SYY-tapauksissa on esitetty eli) viidellä eri tavalla: *ympyrät voivat* sijaita erillään toistensa ulkopuolella, sijaita erillään sisäkkäin, sivuta toisiaan ulkoisesti, sivuta toisiaan sisäisesti tai leikata toisensa. Lisätään kaikenlaisiin kahden ympyrän asetelmiin vielä kolmas ympyrä kahteen ensimmäiseen nähden kaikin mainituin eri tavoin, jolloin kolme ympyrää voivat sijaita keskenään todella monella eri tavalla. Erikoistapauksia ovat lisäksi asetelmat, joissa jokin ympyrä kulkee toisten ympyröiden välisen sivuamis- tai leikkauspisteen kautta. Esitetään seuraavaksi kolmen annetun ympyrän oleellisesti erilaisia asetelmia, piirroksin.



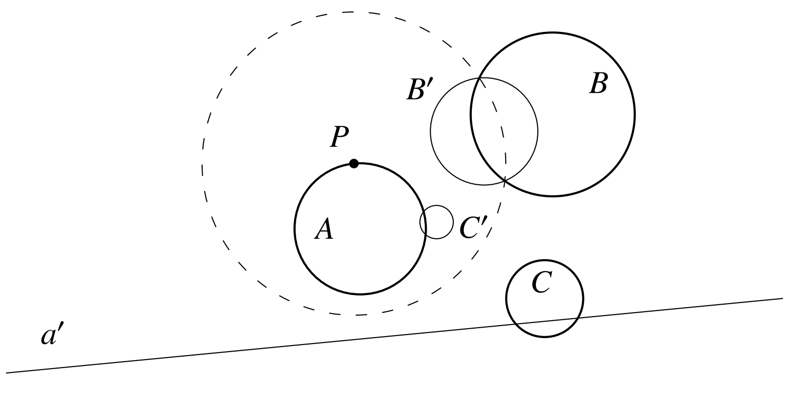


Ratkaisuympyröitä on olemassa yleensä enintään *kahdeksan* tai muutamassa tapauksessa jopa *ääretön* määrä.

Esitellään seuraavaksi ratkaisumenetelmä YYY, joka toimii aina. Yleisen menetelmän pääpiirteet noudattelevat lähdettä [Us, s. 17–18]. Esitellään lisäksi erään yksittäisen ratkaisuympyrän etsiminen toisenlaisella ratkaisumenetelmällä, lähteen [Cou, s. 161–162] mukaan.

Ratkaisumenetelmä (YYY)

Olkoon annettu ympyräkolmikko $\{A, B, C\}$. Ratkaisuympyrät löytyvät soveltamalla SYY-menetelmää (joka puolestaan perustuu PSY-menetelmään). Tällöin on ensimmäiseksi muutettava annettu YYY-kolmikko sopivaksi SYY-apukolmikoksi, inversion avulla. Valitaan mielivaltaisesti jonkin annetun ympyrän (valitaan A) kehältä piste P. Piirretään P-keskinen inversioympyrä mielivaltaisella säteellä. Kuvataan kaikki annetut ympyrät inversiolla ympyrän P suhteen. Inversiokeskuksen P kautta kulkevasta ympyrästä A tulee (inversiokeskuksen kautta kulkematon) suora a'. Inversiokeskuksen kautta kulkemattomat ympyrät B ja C kuvautuvat (inversiokeskuksen kautta kulkemattomiksi) ympyröiksi B' ja C'. Muodostettua SYY-apukolmikkoa $\{a', B', C'\}$ sivuavat tangenttiympyrät löytyvät SYY-menetelmällä. Apukolmikon $\{a', B', C'\}$ löydetyt tan-

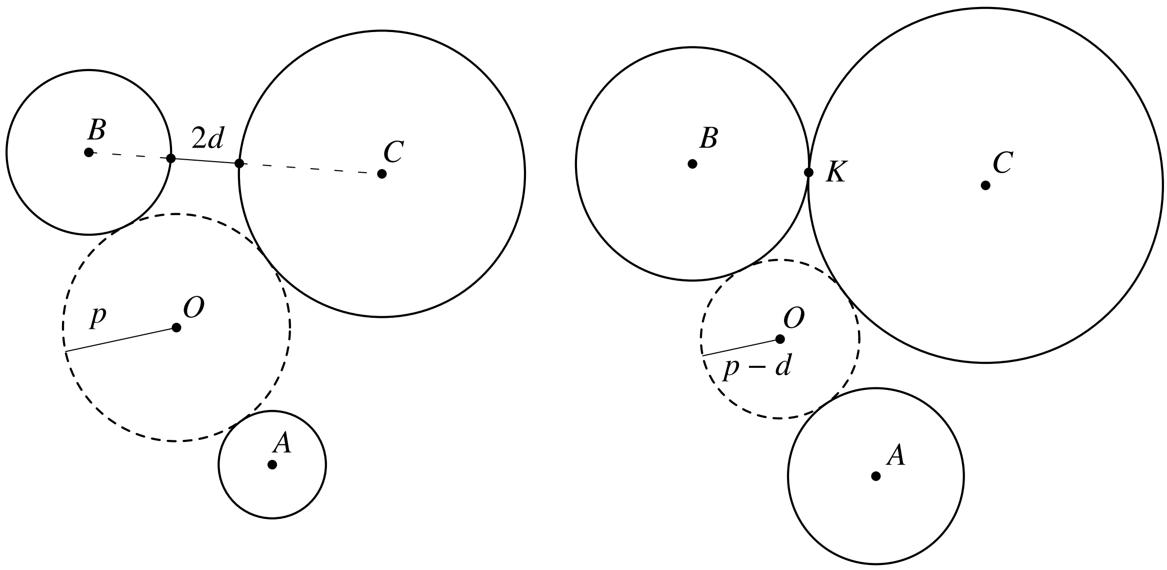


genttiympyrät kuvataan inversiolla P-keskisen ympyrän suhteen, jolloin saadaan annetun kolmikon $\{A, B, C\}$ ratkaisuympyrät.

YYY-yksittäistapaus toisenlaisella menetelmällä

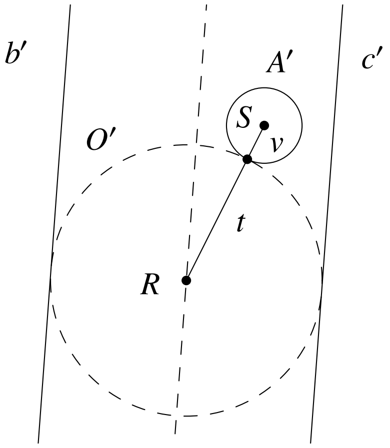
Sijaitkoot kolme annettua ympyrää erillään toisistaan ja toistensa ulkopuolella. Nimitetään ympyröitä niiden keskipisteiden A, B ja C mukaan. Etsitään erästä ratkaisuympyrää, joka sivuaa annettua kolmikkoa ulkoisesti. Kyseistä tangenttiympyrää ei vielä tunneta, mutta esitetään se silti havainnollisuuden takia jo kuvissa. Ratkaisuympyrän keskipiste on O ja säde p.

Kasvatetaan annettujen ympyröiden A, B ja C säteitä pituuden d verran, jotta kaksi toisiaan lähimpänä olevaa ympyrää, B ja C, sivuavat kasvattamisen jälkeen toisiaan sivuamispisteessä K (ks. janan pidentäminen, s. 26). Pituus d on puolet ympyröiden B ja C välisestä etäisyydestä $2d$, ympyröiden keskipisteiden välisellä suoralla (ks. janan keskipisteen K konstruointi, s. 24). Kaikkien ympyröiden keskipisteet pysyvät paikoillaan. On saatu aikaan inversiolla helposti ratkeava kolmikko. Myös ratkaisuympyrän keskipiste O pysyy paikallaan, mutta sen säteen pituus puolestaan pienenee arvoon $p - d$.



Selvitetään apuratkaisuympyrä $(O, p - d)$ inversion avulla seuraavasti. Kuvataan ympyräkolmikko inversiolla mielivaltaisen K-keskisen ympyrän suhteen. Toisiaan inversiokeskuksessa K sivuavat ympyrät B ja C kuvautuvat tällöin keskenään yhdensuuntaisiksi suoriksi b' ja c', jotka eivät kulje pisteen K kautta (ks. lause 2.14). Pisteen K kautta kulkematon ympyrä A kuvautuu inversiossa ympyräksi A', joka ei edelleenkään kulje pisteen K kautta (lause 2.14). Inversiokuvien piirtämiseen löytyy tarvittaessa ohje sivulta 32).

Tangenttiympyrän O' täytyy sivuta suoria b' ja c' sekä ympyrää $A' = (S, v)$, joten etsitty tangenttiympyrä saadaan helposti piirrettyä harpin ja viivaimen avulla. Tangenttiympyrän säteen t on nimittäin oltava puolet suorien b' ja c' välisestä etäisyydestä, joten tangenttiympyrän O' keskipiste R sijaitsee yhdensuuntaisten suorien puolivälissä kulkevalla suoralla – piirretään kyseinen suora. Keskipisteen R etäisyys ympyrän A' keskipisteestä S on ympyröiden O' ja A' säteiden summa $t + v$. Piirretään siis S-keskinen ympyrä, jonka säde on $t + v$. Ympyrä leikkaa yhdensuuntaisten suorien puolivälissä kulkevan suoran tangenttiympyrän keskipisteessä. (Tangenttiympyröitä voi muodostua toki molemmille puolille ympyrää A'.) Näillä tiedoilla tangenttiympyrä $O' = (R, t)$ voidaan kuitenkin jo piirtää harpilla.

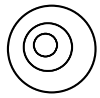
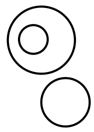


Kuvataan ympyrä $O' = (R, t)$ inversiolla (ympyrän K suhteen) ympyräksi $(O, p - d)$. Muistetaan, että ympyrän keskipiste ei pysy inversiokuvauksessa ympyrän keskellä, joten ympyrä täytyy kuvata muulla tavoin. Helpointa on kuvata ympyrän O' halkaisijan päätepisteet puolisuoralta KR, ja etsiä kuvaympyrän keskipiste O puolittamalla kyseinen halkaisija. O-keskisen tangenttiympyrän säteen voi mitata harppiin esimerkiksi ympyrän A keskipisteen ja pisteen O väliseltä suoralta. Lopuksi piirretään säteeltään d:n verran suurempi ympyrä (O, p). Tangenttiympyrä (O, p) on *eräs* kyseisen Apollonioksen ongelman ratkaisu.

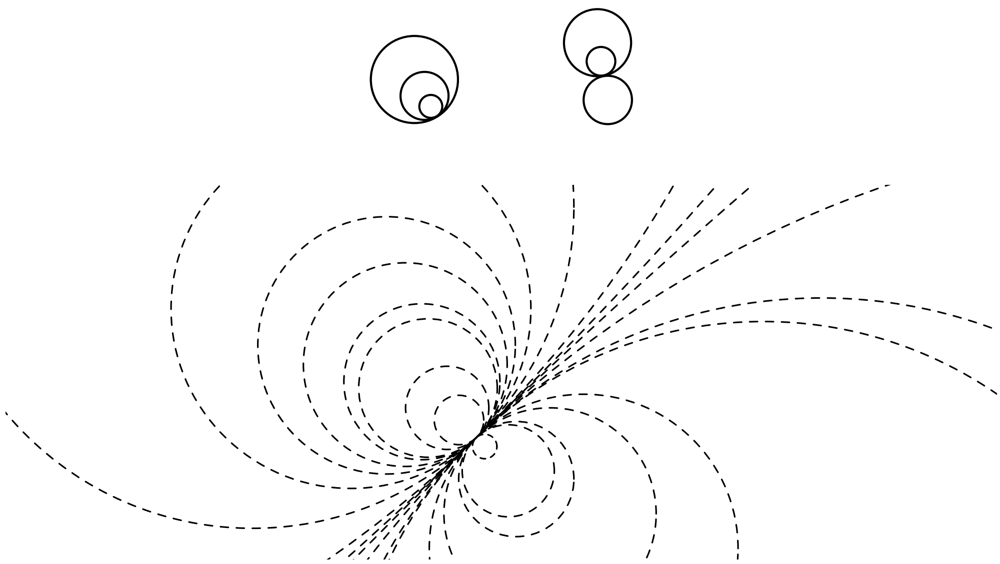
Tällainen ratkaisutapa on kuitenkin yleisyyden puutteessaan hieman hankala, mikäli tahtoo löytää kaikki erilaiset ratkaisuympyrät.

Ratkaisukonstruktioita (YYY)

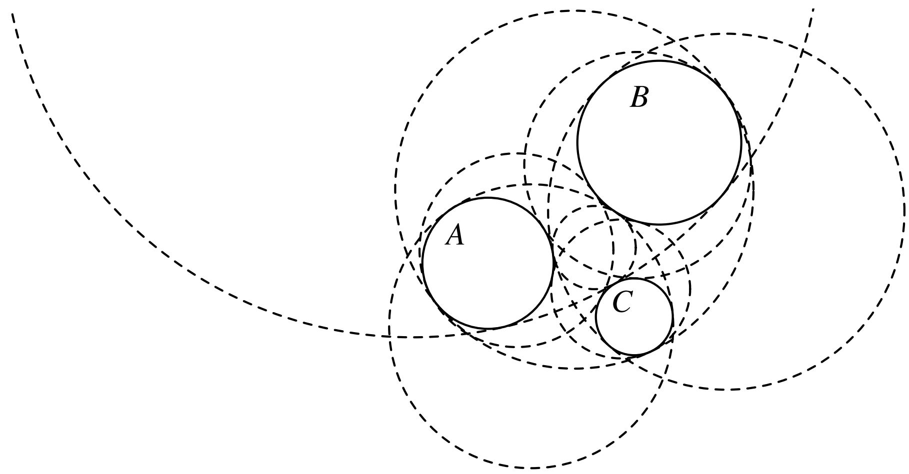
Ratkaisua *ei ole olemassa*, jos kaikki annetut ympyrät sijaitsevat erillään toisistaan ja sisäkkäin, hieman samaan tyyliin kuin tikkataulun renkaat napakympin ympärillä (kuva i). Ratkaisua *ei ole olemassa* myöskään, jos kaikki annetut ympyrät sijaitsevat erillään toisistaan siten, että kaksi ympyrää sijaitsevat sisäkkäin ja yksi muiden ulkopuolella (kuva ii).

i)  ii) 

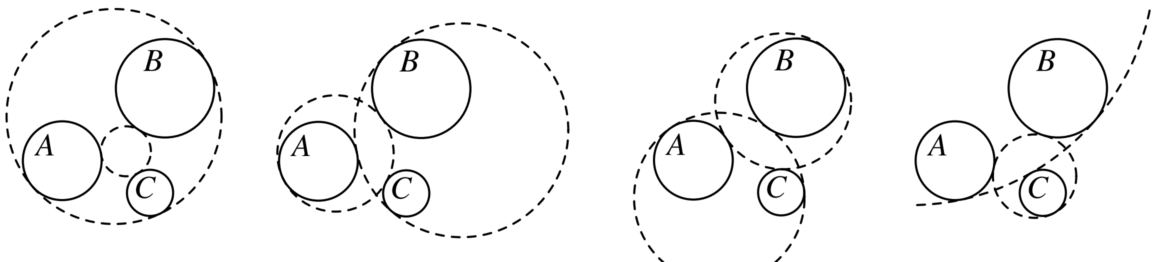
Ratkaisuja on olemassa *ääretön* määrä, jos kaikki annetut ympyrät sivuavat toisiaan samassa pisteessä – sisäisesti tai ulkoisesti.



Jos annetut ympyrät sijaitsevat toisistaan erillään ja toistensa ulkopuolella, on ratkaisuja olemassa *kahdeksan*.



Kyseiset kahdeksan ratkaisuympyrää löytyvät pareittain i) menetelmällä YYY–SYY1, ii) menetelmällä YYY–SYY2, iii) menetelmällä YYY–SYY3 ja iv) menetelmällä YYY–SYY4.



i) ii) iii) iv)

Jätetään loput konstruktiot lukijan ratkaistavaksi. Kolmen annetun ympyrän tapauksesta löytyy kiinnostavaa lisätietoa lähteestä [Cox, s. 9–15], erityisesti annettujen ympyröiden erilaisten mahdollisten sijaintien näkökulmasta.

4 Ratkaisujen lukumäärä

Edellisen luvun perusteella tiedetään, että ratkaisuympyröitä on olemassa useita eri lukumääriä riippuen *annetusta kuvioiden yhdistelmästä* sekä kuvioiden keskinäisistä *sijainneista* (sijaitseminen erillään, sivuaminen ja leikkaaminen). Ratkaisuympyröiden mahdolliset *lukumäärät* on koottu taulukkoon 4.1.

Taulukko 4.1: Ratkaisuympyröiden mahdolliset lukumäärät eri tapauksissa.

	Annetut kuviot	Ratkaisujen lkm
PPP	kolme pistettä	0 tai 1
SSS	kolme suoraa	0, 2 tai 4
YYY	kolme ympyrää	0, 8 tai ∞
PPS	kaksi pistettä ja suora	0, 1 tai 2
PPY	kaksi pistettä ja ympyrä	0, 1 tai 2
PSS	piste ja kaksi suoraa	0, 1 tai 2
PYY	piste ja kaksi ympyrää	0, 1, 2, 3, 4 tai ∞
SSY	kaksi suoraa ja ympyrä	0, 1, 2, 3, 4 tai 8
SYY	suora ja kaksi ympyrää	0, 2, 4, 6, 8 tai ∞
PSY	piste, suora ja ympyrä	0, 1, 2, 3, 4 tai ∞

Kokonaan erilaisia *ratkaisumenetelmiä* puolestaan on vuosisatojen aikana kehitelty todella monia erilaisia, vaikka toki pelkästään harpilla ja viivaimellakin toimivia menetelmiä on useita. Aina löydetään silti samat ratkaisut, mikäli kukin menetelmä toimii. Esitelläänkin seuraavaksi lyhyesti aivan toisentyyppisen ratkaisumenetelmän idea, miten Apollonioksen ongelmaa ratkotaan *algebrallisesti* eli yhtälöiden avulla. Sen jälkeen kerrotaan hieman GeoGebran mahdollisuuksista tarkastella Apollonioksen ongelmaa dynaamisesti eli siirreltävin ja muuteltavin kuvioin.

4.1 Analyyttisen geometrian algebrallinen lähestymistapa

Analyyttiseksi geometriaksi kutsutaan Descartesin kehittämää matematiikan alaa, jossa muutetaan geometrinen ongelma karteesisen koordinaatiston avulla algebralliseksi, jolloin tehtäviä voidaan ratkoa esimerkiksi yhtälöiden avulla [Kon, s. 9]. Ympyröitä ja suoria käsitellään tällöin tason käyrinä, joille voidaan voidaan muodostaa yhtälöt. Käyrien kuvaajat voidaan esittää koordinaatistossa. Jos käyrät leikkaavat toisensa tai sivuavat toisiaan, niin niiden yhteisten pisteiden koordinaatit toteuttavat kyseisten käyrien yhtälöt. Yhteiset pisteet saadaan selville ratkaisemalla annettujen käyrien yhtälöpareja tai yhtälöryhmiä.

Apollonioksen ongelma voidaan siis ratkaista laskennallisesti yhtälöiden avulla, mikä mahdollistaa tietokoneiden myötä ongelman hyödyntämisen monenlaisissa arkielämän sovelluskohteissa, kuten paikannuksessa. Esitetään Apollonioksen ongelman algebrallisen ratkaisumenetelmän idea noudatellen lähdettä [Cou, s. 125–127].

Olkoot annetut kolme kuviota ympyröitä. Jätetään siis käsittelemättä tapaukset, joissa annettu kuvio olisi piste (pelkkä koordinaatti) tai suora (suoran yhtälö). Ympyrä on yhtälöllä esitettäessä perinteisen käsityksen mukainen ympyrä, jonka säde on nollaa suurempi ja äärellinen. Olkoot annettujen ympyröiden keskipisteiden koordinaatit

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) \in \mathbb{R}^2,$$

ja säteet vastaavasti

$$r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}_+.$$

Ratkaistavan tangenttiympyrän keskipiste on $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ja säde $r \in \mathbb{R}_+$. Jotta kaksi ympyrää sivuavat toisiaan, on ympyröiden keskipisteiden välisen etäisyyden oltava ympyröiden säteiden summa tai erotus, kuten on esitetty määritelmässä sivulla 13. Säteiden summan tapauksessa ympyrät sivuavat toisiaan ulkoisesti, ja säteiden erotuksen tapauksessa ympyrät sivuavat toisiaan sisäisesti.

Muodostetaan yhtälöt tuntemattoman tangenttiympyrän ja jokaisen annetun ympyrän kesken, jolloin saadaan yhtälöryhmä:

$$\begin{cases} \sqrt{(x-x_1)^2 + (y-y_1)^2} = |r \pm r_1| \\ \sqrt{(x-x_2)^2 + (y-y_2)^2} = |r \pm r_2| \\ \sqrt{(x-x_3)^2 + (y-y_3)^2} = |r \pm r_3| \end{cases}$$

Mahdollisten ratkaisuympyröiden lukumäärä on yleensä kahdeksan, sillä $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ on merkkien + ja − mahdollisten kombinaatioiden lukumäärä näissä kolmessa yhtälössä. Kyseiset merkkivalinnat vastaavat siis ulkoista (+) ja sisäistä (−) sivuamista.

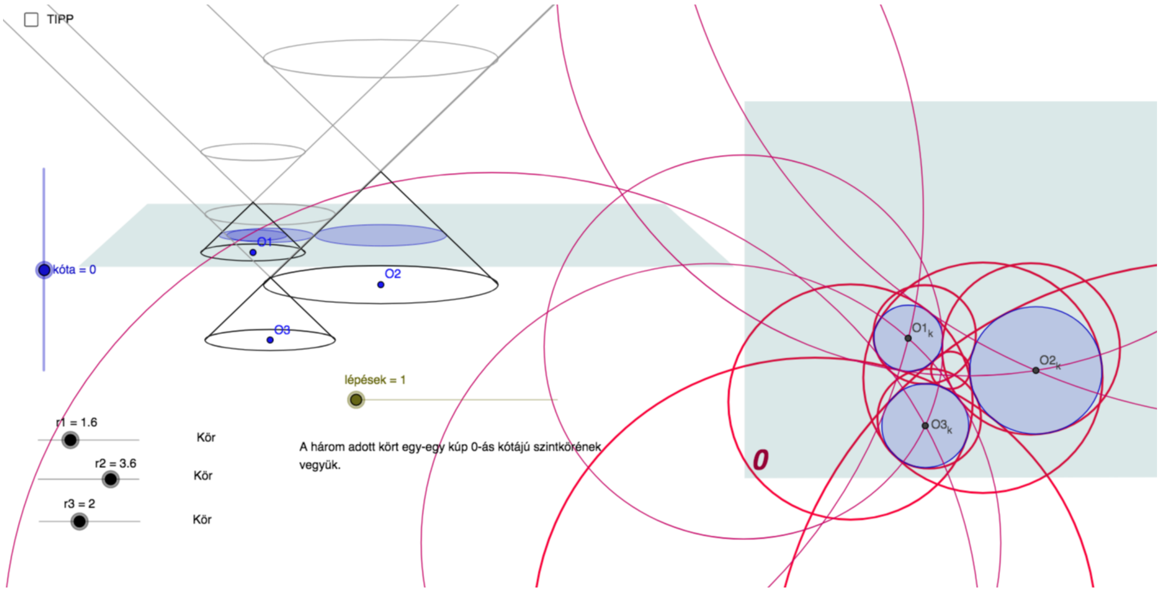
Joissakin tapauksissa reaalisia arvoja x, y ja r ei kuitenkaan ole olemassa, mikäli tangenttiympyrää ei ole mahdollista piirtää. Ongelmalla ei ole olemassa ratkaisua esimerkiksi, kun annetuilla ympyröillä on kaikilla sama keskipiste (samankeskiset ympyrät). Ratkaisujen lukumäärä jää kahdeksaa pienemmäksi myös esimerkiksi, jos annetut ympyrät leikkaavat.

Kukin eri tangenttiympyrä (eli yhtälöryhmän plus- ja miinusmerkkien kahdeksan kombinaatiota) ratkaistaan yksi kerrallaan. Yhtälöryhmästä ratkaistaan muuttujat x, y ja r (> 0). Ratkaisu eli (x, y)-keskinen ja r-säteinen ratkaisuympyrä sivuaa kaikkia kolmea annettua ympyrää.

4.2 Havainnollistaminen dynaamisesti GeoGebralla

Apollonioksen ongelman eri tapauksia voidaan havainnollistaa tasossa GeoGebran dynaamisuuden avulla, sillä GeoGebralla piirrettyjen kuvioiden kokoa ja sijaintia voidaan muuttaa helposti raahaamalla objekteja. Sillä tavoin tämänkin tutkielman itse piirretyt kuvatkin on toteutettu – hyödyntämällä kutakin piirrettyä konstruktiota mahdollisimman paljon liikuttelemalla ja muuttelemalla kuvioita erilaisiksi asetelmiksi. Kuvan mitä tahansa muuttamista varten kaikki kuviot täytyy piirtää kuitenkin täsmällisesti siten, että niiden väliset riippuvuussuhteet pysyvät konstruktion kannalta liikuteltaessakin ennallaan.

Unkarilainen Budai on rakentanut vapaasti kenen tahansa käytettävissä olevan GeoGebratyökirjan, jolla pystytään havainnollistamaan *kaikkia* mahdollisia annettujen kuvioiden asetelmia (ks. kuvakaappaus verkkosivusta). Työkirjassa on kolmiulotteisia kappaleita ja kaksiuloitteisia kuvioita. Kolmiulotteisia ovat kolme *suoraa ympyräpohjaista kartiota*. Kunkin kartion pohjaympyrän sädettä voidaan muuttaa, samoin koko kartion sijaintia avaruudessa. Kartiot leikataan niiden pohjien suuntaisella kaksiulotteisella tasolla, jolloin kartioiden *leikkauskuviot* kyseisessä leikkaustasossa ovat Apollonioksen ongelman kolme annettua kuviota. Leikkauskuvio on kartion huipun kohdalla *piste*, ja huipun sekä pohjan välillä *ympyrä*. Jos kartion pohjaympyrän ja siten myös poikkileikkausympyrän säde lähestyisi ääretöntä, olisi leikkauskuviona jättimäisen ympyrän kehällä *suora*. Leikkauskuvioksi saadaan työkirjassa suora, kun leikkaustaso kulkee kartion pohjan alapuolella, jolloin suora on asetettu työkirjassa kulkemaan kartion pohjaympyrän keskipisteen projektion kohdalla (tällöin suora löytyy leikkaustasosta helpoiten). Myös leikkaavan tason korkeutta kartioihin nähden voidaan siis muuttaa. Työkirjaan saadaan näkyviin



kaikki ratkaisuympyrät, jolloin kartioita liikuttelemalla ja niiden pohjasäteitä muuttelemalla voidaan nähdä, miten ratkaisuympyrät muuttuvat eri tilanteissa. Budain tekemä vapaassa käytössä oleva GeoGebra-työkirja löytyy lähdeviitteessä [Bu, s. 170] mainittavasta verkko-osoitteesta.

Kartioleikkausten hyödyntäminen ratkaisun konstruoinnissa sopii ajatuksellisestikin erityisen kauniisti Apollonios Pergalaisen keksimän ongelman tarkasteluun, sillä juuri Apollonios teki aikanaan merkittävää työtä nimenomaan kartioleikkausten saralla.

Lähteet

[Bo] Boyer, C. *Tieteiden kuningatar, Matematiikan historia, osat I ja II*. Alkuteos englanninkielinen *A History of Mathematics*, 1. painos 1968; 1. uudistettu painos 1989; 2. uudistetun painoksen toimittanut Uta C. Merzbach, John Wiley & Sons, 1991. Suomentanut Kimmo Pietiläinen, WSOY, 1994.

[Bu] Budai, L. *A possible general approach of the Apollonius problem with the help of GeoGebra*. Annales Mathematicae et Informaticae 40, s. 163–173, 2012. Artikkelissa esitetyn internetlinkin sisältö on siirretty osoitteeseen https://www.geogebra.org/m/rQsgPMQX, viite tarkistettu 9.4.2019.

[Cou] Courant, R., Robbins, H. ja Stewart, I. *What is mathematics? An elementary approach to ideas and methods*. 1. painos 1941; 2. uudistetun painoksen toimittanut Ian Stewart, Oxford University Press, 1996.

[Cox] Coxeter, H. S. M. *The Problem of Apollonius*. The American Mathematical Monthly, vuosikerta 75, nro 1, s. 5–15, Taylor & Francis, 1968. Saatavilla osoitteessa https://www.jstor.org/stable/2315097. Viite tarkistettu 20.3.2018.

[Fu] Fulton, N. ja Huynh, U. *Conflict Management: Apollonius in airspace design*. Safety Science, vuosikerta 72, s. 9–22, 2015. Saatavilla osoitteessa https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0925753514001787. Viite tarkistettu 25.5.2019.

[Go] Godfrey, C. ja Siddons, A. W. *Modern Geometry*. Cambridge University Press, 1908. Saatavilla osoitteessa https://archive.org/details/moderngeometry00siddgoog/. Viite tarkistettu 12.5.2019.

[He] Heath, T. *A History of Greek Mathematics, Volume II, From Aristarchus to Diophantus*. 1. painos, Clarendon Press, 1921; 2. lyhentämätön ja korjattu painos, Dover Publications, 1981.

[Kon] Kontkanen, P., Liira, R., Luosto, K., Ronkainen, A. ja Savolainen, S. *Pyramidi 4, Lukion pitkä matematiikka, Analyyttinen geometria*. Oppikirja, 1.–2. painos, Tammi, 2007.

[Kor] Korhonen, H. *Kolme näkökulmaa Apollonioksen ongelmaan*. Dimensio-lehti, 5/2009, s. 81–82, MAOL ry, 2009.

[Ku] Kunkel, P. *The tangency proplem of Apollonius: three looks*. BSHM Bulletin: Journal of the British Society for the History of Mathematics, vuosikerta 22, nro 1, s. 34–46, 2007. Saatavilla osoitteessa https://dx.doi.org/10.1080/17498430601148911. Viite tarkistettu 12.5.2019.

[Le1] Lehtinen, M. *Geometrian perusteita*. Matematiikkalehti Solmu, 2011. Saatavilla osoitteessa https://matematiikkalehtisolmu.fi/2011/geometria2011.pdf. Viite tarkistettu 6.9.2018.

[Le2] Lehtinen, M. *Nimekästä geometriaa*. Julkaisu matematiikkakilpailut.fi-sivuston valmennusmateriaaleissa, 2017. Viite tarkistettu 17.3.2019. Saatavilla osoitteessa https://matematiikkakilpailut.fi/kirjallisuus/nimgeom.pdf.

[Le3] Lehto, H., Luoma, T., Havukainen, R. ja Leskinen, J. *FYSIIKKA 2–3, Lämpö ja Aallot*. Oppikirja, 1.–3. painos, Tammi, 2006.

[Ma] Matemaattisten Aineiden Opettajien Liitto MAOL ry. *MAOL-taulukot*. Oppikirja, 2. painos, Otava, 2005.

[Roe] Roegel, D. *Kissing circles: A French romance in Metapost*. Artikkelina julkaisussa TUGboat: The Communications of the TEX Users Group, vuosikerta 26, nro 1, s. 10–17, 2005. Saatavilla osoitteessa https://www.tug.org/TUGboat/tb26-1/tb82complete.pdf. Viite tarkistettu 25.5.2019.

[Ros] Rosenberg, E. *Geometria*. Oppikirja, Limes ry, 2002.

[Th] Thompson, J. ja Martinson, T. *Matematiikan käsikirja*. Alkuteos ruotsinkielinen *Matematik lexikon*, Wahlström & Widstrand, josta uusitun painoksen toimittaneet Jan Thompson ja Thomas Martinson, 1991. Suomenkielisen 1. painoksen toimittaneet työryhmänä Immonen, Peltonen, Välimäki, Ketola, Tuuri ja Lassas; 2. painoksen toimittanut Virpi Kauko; 3. painos, Tammi, 1994.

[Us] Uski, J. *Apollonioksen ongelma*. Pro gradu -tutkielma, Helsingin yliopisto, 2013. Tutkielmassa käytetty lähdesivusto http://apollonius.wikispaces.com ei ole enää saatavilla.